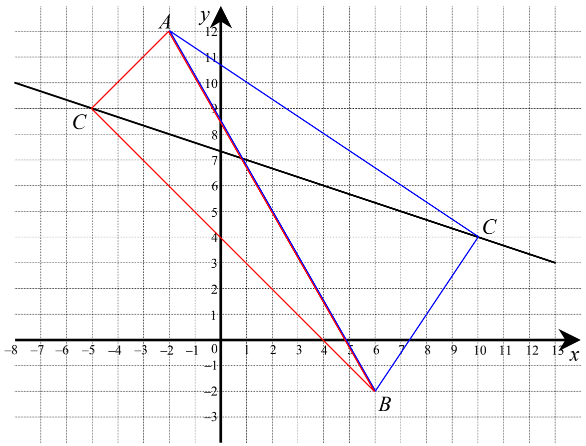
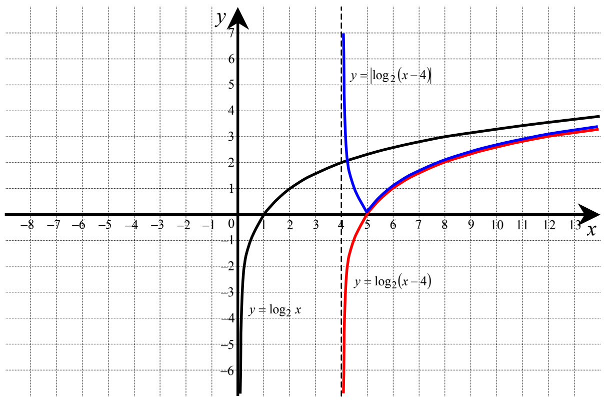
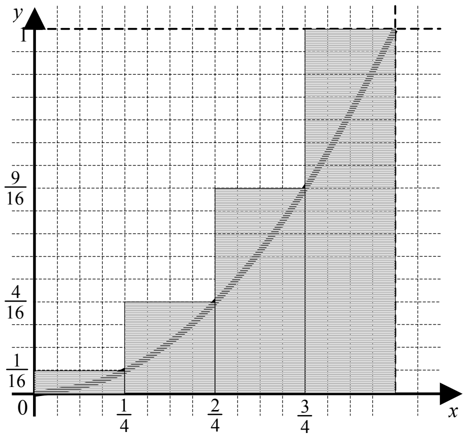
ODPOWIEDZI I SCHEMAT PUNKTOWANIA – ZESTAW NR 1
POZIOM ROZSZERZONY

Nr zadania	Nr czynności	Etapy rozwiązania zadania	Liczba punktów	Uwagi
	1.1	**I metoda rozwiązania („PITAGORAS"):** Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych: np. 	1	• Rysunek musi zawierać daną prostą oraz punkty A i B. Inne elementy mogą, ale nie muszą być uwzględnione. • Współrzędne punktu C można odczytać z rysunku, ale zdający musi sprawdzić, np. przez wstawienie do równania prostej prawidłowość odczytu. Przyznajemy pełna pulę punktów. • W przypadku, gdy zdający poda odczytane współrzędne punktu C i nie dokona sprawdzenia z warunkami zadania otrzymuje punkty tylko w czynnościach 1.1 i 1.5.
	1.2	Wprowadzenie oznaczenia współrzędnych punktu C, np. $C=(22-3y,y)$ lub $C=(x,-\frac{1}{3}x+\frac{22}{3})$.	1	
	1.3	Wykorzystanie twierdzenia Pitagorasa i zapisanie warunku prostopadłości odcinków AC i BC: $\lvert AC\rvert^2+\lvert BC\rvert^2=\lvert AB\rvert^2$, w którym $\lvert AC\rvert^2=10y^2-168y+720$, $\lvert BC\rvert^2=10y^2-92y+260$, $\lvert AB\rvert^2=260$ lub $\lvert AC\rvert^2=\frac{1}{9}\left(10x^2+64y+232\right)$, $\lvert BC\rvert^2=\frac{1}{9}\left(10x^2-164+1108\right)$.	1	
	1.4	Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą: np. $y^2-13y+36=0$ lub $x^2-5x-50=0$.	1	
	1.5	Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $C=(10,4)$ lub $C=(-5,9)$.	1	

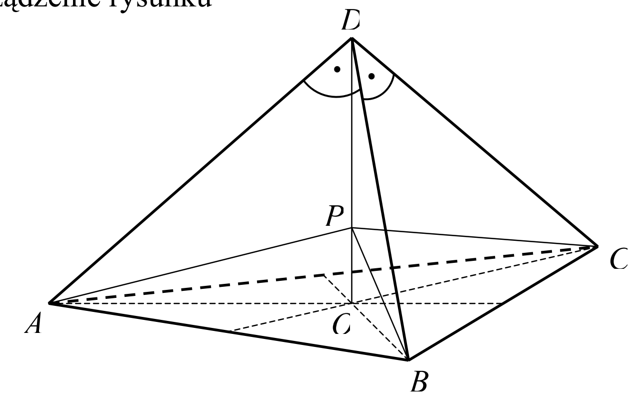
	1.1	**II metoda rozwiązania („WEKTORY”):** Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych.	1	Rysunek musi zawierać daną prostą oraz punkty A i B. Inne elementy mogą, ale nie muszą być uwzględnione.
	1.2	Wprowadzenie oznaczeń pomocniczych i wyznaczenie wektorów: np. $C=(22-3y,y)$, $\vec{CA}=[-24+3y,12-y]$, $\vec{CB}=[-16+3y,-2-y]$ lub $C=(x,-\frac{1}{3}x+\frac{22}{3})$, $\vec{CA}=[-2+x,\frac{1}{3}x+\frac{14}{3}]$, $\vec{CB}=[6-x,\frac{1}{3}x-\frac{28}{3}]$.	1	
	1.3	Wykorzystanie warunku prostopadłości wektorów $\vec{CA}$, $\vec{CB}$ i zapisanie równania: np. $(-24+3y)(-16+3y)+(12-y)(-2-y)=0$, gdzie y to rzędna punktu C lub $-(2+x)(6-x)+\frac{1}{9}(x+14)(x-28)=0$, gdzie x to odcięta punktu C.	1	
	1.4	Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą : np. $y^2-13y+36=0$ lub $x^2-5x-50=0$.	1	
	1.5	Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $C=(10,4)$ lub $C=(-5,9)$.	1	
	1.1	**III metoda rozwiązania („KONSTRUKCJA”):** Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych.	1	Rysunek musi zawierać daną prostą oraz punkty A i B. Inne elementy mogą, ale nie muszą być uwzględnione.
	1.2	Zapisanie równania okręgu o środku w punkcie $S=(2,5)$, który jest środkiem odcinka AB i promieniu $r=\frac{1}{2}\lvert AB\rvert=\frac{1}{2}\sqrt{260}$: $(x-2)^2+(y-5)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{260}\right)^2$.	1	
	1.3	Zapisanie układu równań: $\begin{cases} x+3y=22 \\ (x-2)^2+(y-5)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{260}\right)^2 \end{cases}$.	1	
	1.4	Doprowadzenie obliczeń do postaci równania kwadratowego, np.: $y^2-13y+36=0$ lub $x^2-5x-50=0$.	1	

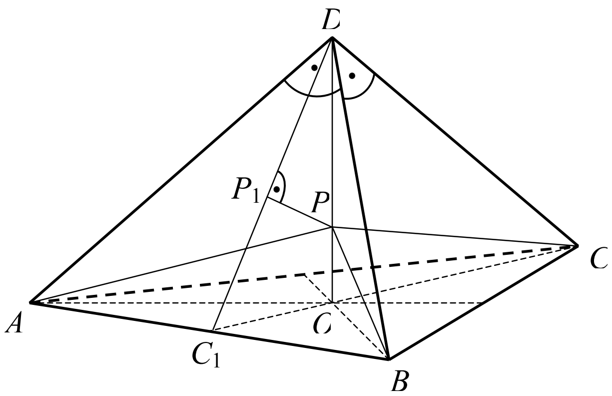
	1.5	Rozwiązanie równania i zapisanie odpowiedzi: $C=(10,4)$ lub $C=(-5,9)$.	1	
		Ogólnie, rozwiązanie powinno mieć postać:		
	1.1	**Sporządzenie rysunku w układzie współrzędnych.**	1	
	1.2	**Przedstawienie metody pozwalającej wyznaczyć punkt *C*.**	1	W metodzie II i III przestawione zostały czynności 1.2 i 1.3 i zapisane w kolejności takiej, jaka będzie miała miejsce w trakcie rozwiązania tą metodą.
	1.3	**Zapisanie warunków algebraicznych wynikających z obranej metody rozwiązania.**	1	
	1.4	**Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą.**	1	
	1.5	**Wyznaczenie współrzędnych punktów *C*.**	1	
2	2.1	Zapisanie wzoru funkcji g w postaci $g(x)=\frac{a}{x+3}+2$ dla $x\neq-3$.	1	Przyznajemy punkt również wtedy, gdy zdający nie zapisze dziedziny funkcji *g*.
	2.2	Wyznaczenie współczynnika a z równania $g(-4)=6$: $a=-4$.	1	
	2.3	Doprowadzenie nierówności $\frac{-4}{x+3}+2<4$ do postaci $\frac{-2x-10}{x+3}<0$.	1	
	2.4	Wyznaczenie zbioru rozwiązań nierówności $g(x)<4$: $x\in(-\infty,-5)\cup(-3,\infty)$.	1	
3	3.1	Zapisanie podstawy logarytmu: $p=2$.	1	
	3.2	Obliczenie wartości funkcji *f* dla argumentu $x=0{,}125$: $f(0{,}125)=-3$.	1	
	3.3	Narysowanie wykresu funkcji $y=f(x-4)$.	1	
	3.4	Narysowanie wykresu funkcji *g* 	1	W tej czynności oceniamy poprawność wykonania przekształcenia $y=\lvert f(x)\rvert$. Punkt przyznajemy trównież wtedy, gdy zdający niepoprawnie wykona przesunięcie, ale poprawnie wykona przekształcenie $y=\lvert f(x)\rvert$. Jeśli zdający od razu narysuje wykres funkcji g, to przyznajemy punkt w czynnościach 3.3 i 3.4.

	3.5	Podanie miejsca zerowego funkcji g: $x=5$.	1	Czynność 3.5 oceniamy konsekwentnie do uzyskanej przez zdającego funkcji g.
4	4.1	Wyrażenie funkcji $\mathrm{tg}\alpha$ w zależności od a i H: $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\frac{a}{2}}{H}=\dfrac{a}{2H}$.	1	
	4.2	Wyrażenie funkcji $\cos\alpha$ w zależności od a i h: $\cos\alpha=\dfrac{h}{a}$.	1	
	4.3	Wykorzystanie wyznaczonych zależności i doprowadzenie podanego w treści zadania związku $a^2=H\cdot h$ do zależności z jedną zmienną α: np. $\dfrac{\frac{a}{2}}{H}=\mathrm{tg}\alpha$ stąd $H=\dfrac{a}{2\mathrm{tg}\alpha}$, $\dfrac{h}{a}=\cos\alpha$ stąd $h=a\cos\alpha$; po podstawieniu otrzymujemy $2\mathrm{tg}\alpha=\cos\alpha$.	1	
	4.4	Doprowadzenie zależności do postaci równania, w którym jest tylko jedna funkcja trygonometryczna, np.: $2\sin\alpha=1-\sin^2\alpha$ dla $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.	1	
	4.5	Rozwiązanie równania, np. dokonanie podstawienia $t=\sin\alpha$ i rozwiązanie równania kwadratowego $t^2+2t-1=0$: $t=-1-\sqrt{2}$ oraz $t=-1+\sqrt{2}$.	1	
	4.6	Odrzucenie ujemnego pierwiastka i podanie odpowiedzi: $\sin\alpha=\sqrt{2}-1$.	1	Jeśli zdający nie wskaże właściwego rozwiązania spełniającego warunki zadania, to nie otrzymuje punktu za tę czynność.
	4.3	**II sposób rozwiązania (czynności 4.3 i 4.4)** Zapisanie wyrażenia $a^2=H\cdot h$ w postaci proporcji $\dfrac{a}{H}=\dfrac{h}{a} \quad\Leftrightarrow\quad 2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}a}{H}=\dfrac{h}{a}$.	1	
	4.4	Wykorzystanie funkcji trygonometrycznych do zapisania proporcji w postaci równania jednej zmiennej: $2\cdot\dfrac{\frac{1}{2}a}{H}=2\cdot\mathrm{tg}\alpha$, $\dfrac{h}{a}=\cos\alpha$ stąd $\dfrac{a}{H}=\dfrac{h}{a}$, $\quad 2\cdot\mathrm{tg}\alpha=\cos\alpha$, $\quad \sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0$ dla $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.	1	

5	5.1	Sporządzenie rysunku dla $n = 4$. 	1	
	5.2	Obliczenie sumy pól czterech prostokątów: $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{4}{4}\right)^2=\frac{15}{32}$.	1	
	5.3	Obliczenie sumy pól wszystkich n prostokątów w postaci: $\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2+\ldots+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2=\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3}$.	1	Wystarczy, że zdający poprawnie zapisze lewą stronę podanej postaci.
	5.4	Wykorzystanie podanej tożsamości i przekształcenie sumy do postaci: $S_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$ lub $S_n=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.	1	
6	6.1	Zapisanie wielomianu w postaci: $W(x)=x^4-2x^3+x^2+x^2-6x+9$.	1	
	6.2	Zapisanie wielomianu w postaci sumy dwóch składników nieujemnych: np. $W(x)=x^2(x-1)^2+(x-3)^2$ lub $W(x)=(x^2-x)^2+(x-3)^2$.	1	
	6.3	Uzasadnienie, że oba składniki są nieujemne i nie mogą być jednocześnie równe 0, więc wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych.	1	
	6.1	**II metoda rozwiązania:** Obliczenie pochodnej wielomianu $W(x)$ i jej miejsca zerowego: $W'(x)=2(2x-3)(x^2+1)$, $x=\frac{3}{2}$.	1	

	6.2	Uzasadnienie, że w punkcie $x=\frac{3}{2}$ wielomian $W(x)$ osiąga lokalne minimum.	1	
	6.3	Obliczenie wartości wielomianu $W(x)$ dla $x=\frac{3}{2}$ albo jej oszacowanie z dołu przez liczbę dodatnią i uzasadnienie, że wielomian $W(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych: $W\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{45}{16}$.	1	
7	7.1	Zapisanie równania $f(x)=1$ w postaci: $-\cos^2 x+\cos x=0$.	1	
	7.2	Zapisanie równań: $\cos x=0$ lub $\cos x=1$.	1	
	7.3	Zapisanie rozwiązań równania $f(x)=1$ należących do przedziału $\langle 0,\ 2\pi\rangle$: $x=0\vee x=\frac{\pi}{2}\vee x=\frac{3\pi}{2}\vee x=2\pi$.	1	
	7.4	Przedstawienie metody rozwiązania zadania, np. wprowadzenie pomocniczej niewiadomej $t=\cos x$ i $t\in\langle -1,1\rangle$ i zapisanie funkcji $f(t)=-t^2+t+1$ dla $t\in\langle -1,1\rangle$.	1	Punkt otrzymuje też zdający, który pominął dziedzinę funkcji *f*.
	7.5	Obliczenie pierwszej współrzędnej wierzchołka paraboli, będącej wykresem trójmianu kwadratowego $f(t)=-t^2+t+1$: $t_w=\frac{1}{2}$.	1	Wystarczy, że zdający zapisze trójmian w postaci kanonicznej: $f(t)=-\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{4}$.
	7.6	Uwzględnienie faktu, że $\frac{1}{2}\in\langle -1,1\rangle$ i współczynnik przy t^2 jest ujemny, i obliczenie największej wartości funkcji f: $f_{\max}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{4}$	1	Zdający nie musi analizować znaku współczynnika przy t^2, o ile oblicza $f(-1)$, $f(1)$, $f\left(\frac{1}{2}\right)$ i wybiera największą z nich.

8	8.1	**I metoda rozwiązania:** Sporządzenie rysunku 	1	Zdający może pominąć uzasadnienie, że punkt *P* leży na wysokości *DO*.
	8.2	Obliczenie długości krawędzi bocznej ostrosłupa: $a=1$.	1	
	8.3	Obliczenie objętości ostrosłupa *ABCD*, np. poprzez stwierdzenie, że dany ostrosłup to „naroże” sześcianu o krawędzi długości 1: $V_{ABCD}=\frac{1}{6}$.	1	
	8.4	Zapisanie równania z niewiadomą *H* – szukaną odległością: $3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot H+\frac{1}{3}\cdot\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}\cdot H=\frac{1}{6}$.	1	Wystarczy że zdający zapisze, że objętość ostrosłupa jest sumą objętości czterech ostrosłupów, których podstawami są ściany danego ostrosłupa, a wysokością szukana odległość .
	8.5	Obliczenie szukanej odległości: $H=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.	1	

	8.1	**II metoda rozwiązania:** Sporządzenie rysunku:  P_1 jest rzutem punktu P na wysokość ściany bocznej DC_1.	1	
8	8.2	Obliczenie długości DC_1: $\lvert DC_1\rvert=\frac{1}{2}\lvert AB\rvert=\frac{\sqrt{2}}{2}$.	1	
	8.3	Wyznaczenie $\lvert DO\rvert$ z trójkąta DOC_1: np. $\lvert DO\rvert^2=\lvert DC_1\rvert^2-\lvert OC_1\rvert^2$, gdzie $\lvert OC_1\rvert=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{6}$, stąd $\lvert DO\rvert=\frac{\sqrt{3}}{3}$.	1	
	8.4	Zapisanie równania z niewiadomą *H*, np. z podobieństwa trójkątów $\Delta PP_1D\sim\Delta DOC_1$ wynika proporcja $\frac{\lvert PP_1\rvert}{\lvert DP\rvert}=\frac{\lvert OC_1\rvert}{\lvert DC_1\rvert}$ i $\lvert PP_1\rvert=H$, $\frac{H}{\frac{\sqrt{3}}{3}-H}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{6}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.	1	
	8.5	Obliczenie szukanej odległości: $H=\frac{3-\sqrt{3}}{6}$.	1	
9	9.1	Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\lvert\Omega\rvert=8!$.	1	
	9.2	Obliczenie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*, że jako pierwsze pójdą kobiety i żona będzie szła bezpośrednio przed mężem: $\lvert A\rvert=3!\cdot3!=36$.	1	Wystarczy zapis $\lvert A\rvert=3!\cdot3!$ lub $\lvert A\rvert=36$.

	9.3	Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia *A*: $P(A)=\frac{3!\cdot 3!}{8!}=\frac{1}{1120}$.	1	
	9.4	Porównanie otrzymanego prawdopodobieństwa z 0,001, np.: $P(A)=\frac{1}{1120}<\frac{1}{1000}$ lub $P(A)\approx 0{,}0009<0{,}001$.	1	
10	10.1	Zapisanie układu pozwalającego wyznaczyć równanie prostej przechodzącej przez punkty $(x_n,0)$, $(-1,1)$, $(0,y_n)$: $\begin{cases}1=-a+b\\ 0=a(-1-n)+b\end{cases}$.	1	
	10.2	Wyznaczenie z układu niewiadomej *b*: np. $b=1+\frac{1}{n}$.	1	
	10.3	Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n=1+\frac{1}{n}$ albo $y_n=\frac{n+1}{n}$.	1	
	10.1	**II metoda rozwiązania:** Zapisanie współczynnika kierunkowego prostej X_nP (przechodzącej przez punkty $(x_n,0)$ i *P*): $a=\frac{1}{-1-(-1-n)}=\frac{1}{n}$.	1	
	10.2	Zapisanie równania prostej X_nP: $y=\frac{1}{n}(x+1)+1$.	1	
	10.3	Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n=1+\frac{1}{n}$ albo $y_n=\frac{n+1}{n}$.	1	
	10.1	**III metoda rozwiązania:** Wprowadzenie oznaczeń: $A=(x_n,0)$, $P=(-1,1)$, $C=(0,y_n)$. Wyznaczenie współrzędnych wektorów $\overrightarrow{AP}=[n,1]$, $\overrightarrow{PC}=[1,y_n-1]$.	1	
	10.2	Zapisanie warunku równoległości wektorów: $\overrightarrow{AP}\parallel\overrightarrow{PC}\Leftrightarrow d\left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{PC}\right)=0$ stąd $n(y_n-1)-1=0$.	1	
	10.3	Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n=1+\frac{1}{n}$ albo $y_n=\frac{n+1}{n}$.	1	

	10.1	**IV metoda rozwiązania:** Wprowadzenie oznaczeń: $A=(x_n,0)$, $P=(-1,1)$, $C=(0,y_n)$. Wykorzystanie zależności: $\lvert AP\rvert+\lvert PC\rvert=\lvert AC\rvert$, $\sqrt{(-1-x_n)^2+(1-0)^2}+\sqrt{(0+1)^2+(y_n-1)^2}=\sqrt{(0-x_n)^2+(y_n-0)^2}$.	1	
	10.2	Podstawienie $x_n=-1-n$ i doprowadzenie wyrażenia do postaci: $(n\cdot y_n-n-1)^2=0$.	1	
	10.3	Zapisanie wzoru szukanego ciągu: $y_n=1+\frac{1}{n}$ albo $y_n=\frac{n+1}{n}$.	1	
11	11.1	Przyjęcie oznaczeń, wykorzystanie definicji lub własności ciągu geometrycznego i zapisanie zależności między długościami boków trójkąta prostokątnego, np.: a, b, c – długości boków trójkąta prostokątnego i $a<b<c$, $b=a\cdot q$, $c=a\cdot q^2$ lub $b^2=ac$.	1	
	11.2	Wykorzystanie twierdzenie Pitagorasa i zapisanie równania, w którym występują najwyżej dwie niewiadome, np.: $a^2+(aq)^2=(aq^2)^2$ lub $a^2+ac=c^2$.	1	
	11.3	Zapisanie równania, np.: $q^4-q^2-1=0$ lub $\left(\frac{c}{a}\right)^2-\frac{c}{a}-1=0$.	1	
	11.4	Wykonanie podstawienia $t=q^2$ lub $t=\frac{c}{a}$ i rozwiązanie równania $t^2-t-1=0$: $t=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\vee t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.	1	
	11.5	Obliczenie ilorazu ciągu: $q=\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$.	1	