Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
i schemat oceniania zadań otwartych

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
B	**D**	**D**	**B**	**A**	**C**	**A**	**A**	**B**	**A**	**D**	**D**	**C**	**D**	**C**	**B**	**D**	**B**	**C**	**C**

Schemat oceniania zadań otwartych

Zadanie 21. *(2pkt)*

Rozwiąż nierówność $(x+2)\cdot(2-x)-\frac{(x+2)^2}{2}\le -\frac{3}{2}x^2$.

Rozwiązanie

Stosując wzór skróconego mnożenia na różnicę kwadratów oraz wzór skróconego mnożenia na kwadrat sumy nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej

$$4-x^2-\frac{1}{2}\left(x^2+4x+4\right)\le -\frac{3}{2}x^2.$$

Przekształcając tę nierówność dostajemy kolejno

$$4-x^2-\frac{1}{2}x^2-2x-2+\frac{3}{2}x^2\le 0,$$
$$2-2x\le 0,$$
$$x\ge 1.$$

Odpowiedź: $x\in\langle 1,+\infty)$.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy poprawnie zastosuje oba wzory skróconego mnożenia zapisując nierówność w postaci np.

$$4-x^2-\frac{1}{2}\left(x^2+4x+4\right)\le -\frac{3}{2}x^2$$

i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy poda zbiór rozwiązań nierówności: $\langle 1,+\infty)$ lub $x\in\langle 1,+\infty)$ lub $x\ge 1$.

Zadanie 22. *(2 pkt)*

Wierzchołek paraboli będącej wykresem funkcji kwadratowej $f(x)=-3x^2+12x+c$ należy do prostej o równaniu $y=x+1$. Oblicz wartość współczynnika c.

Rozwiązanie

Pierwsza współrzędna wierzchołka paraboli będącej wykresem funkcji f jest równa

$$x_w=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2\cdot(-3)}=2.$$

Drugą współrzędna wierzchołka jest równa

$$y_w=f(x_w)=f(2)=-3\cdot 2^2+12\cdot 2+c=-12+24+c=12+c.$$

Ponieważ wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu $y=x+1$, więc

$$y_w=x_w+1$$

czyli

$$12+c=2+1.$$

Stąd $c=-9$.

Odpowiedź: $c=-9$.

Uwaga
Drugą współrzędną wierzchołka paraboli możemy obliczyć wykorzystując wzór $y_w = -\frac{\Delta}{4a}$. Wtedy mamy $y_w = -\frac{12^2 - 4\cdot(-3)\cdot c}{4\cdot(-3)} = \frac{144+12c}{12} = 12 + c$.

Możemy również wzór funkcji *f* zapisać w postaci kanonicznej $f(x) = -3(x-2)^2 + c + 12$, z której odczytujemy obie współrzędne wierzchołka paraboli $x_w = 2$ i $y_w = 12 + c$.

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy:
- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka i wyznaczy drugą współrzędną w zależności od *c*, np. $x_w = 2$ i $y_w = 12 + c$

albo
- obliczy pierwszą współrzędną wierzchołka i wykorzystując informację, że wierzchołek paraboli leży na prostej o równaniu $y = x + 1$, obliczy drugą współrzędną wierzchołka: $x_w = 2$ i $y_w = 3$

i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy obliczy wartość współczynnika *c*: $c = -9$.

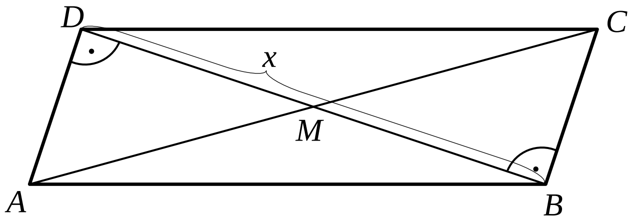
Zadanie 23. ***(2pkt)***
Zapisz wielomian $W(x) = x^3 + 4x^2 - 16x - 64$ w postaci iloczynowej. Uzasadnij, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \geq 4$ prawdziwa jest nierówność $W(x) \geq 0$.
Rozwiązanie
Grupując wyrazy możemy wielomian *W* zapisać w postaci
$$W(x) = x^3 + 4x^2 - 16x - 64 = x^2(x+4) - 16(x+4) =$$
$$= (x+4)(x^2 - 16) = (x+4)(x+4)(x-4) = (x+4)^2(x-4).$$
Dla każdej liczby rzeczywistej $x \geq 4$ czynnik $(x+4)^2$ jest dodatni, a czynnik $x-4$ jest nieujemny, więc $(x+4)^2(x-4) \geq 0$, co należało uzasadnić.

Schemat punktowania
Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zapisze wielomian w postaci
$W(x) = (x+4)(x+4)(x-4)$ lub $W(x) = (x+4)^2(x-4)$ lub $W(x) = (x^2-16)(x+4)$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy uzasadni, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \geq 4$ prawdziwa jest nierówność $(x+4)^2(x-4) \geq 0$.

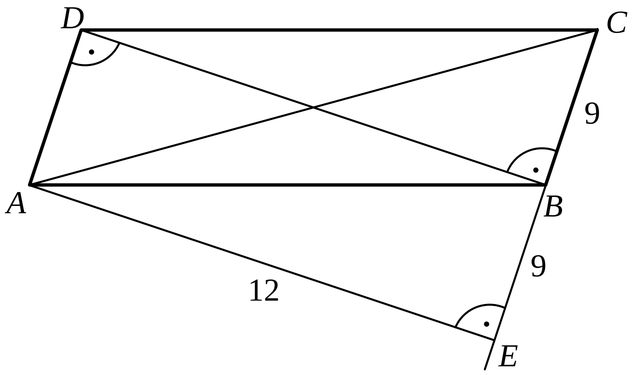
Zadanie 24. ***(2pkt)***
Krótsza przekątna równoległoboku jest prostopadła do dwóch przeciwległych jego boków. Długość tej przekątnej jest o 3 cm większa od długości krótszego boku i o 3 cm mniejsza od długości dłuższego boku. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego równoległoboku.

Rozwiązanie
Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.



Wówczas $|AD| = x-3$ i $|AB| = x+3$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ADB* otrzymujemy
$$|AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2,$$
co pozwala napisać równanie
$$(x+3)^2 = (x-3)^2 + x^2.$$
Rozwiązując je dostajemy
$$x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 + x^2,$$
$$x^2 = 12x.$$
Ponieważ $x > 0$, więc dzieląc obie strony równania przez *x* mamy
$$x = 12.$$
Zatem $|AD| = 12 - 3 = 9$.
Przekątne równoległoboku połowią się, więc
$$|BM| = |DM| = 6 \text{ oraz } |AM| = |MC|.$$
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *ADM* obliczamy połowę długości przekątnej *AC*
$$|AM|^2 = |AD|^2 + |DM|^2,$$
$$|AM|^2 = 9^2 + 6^2 = 117.$$
Stąd
$$|AM| = \sqrt{117} = 3\sqrt{13}.$$
Przekątna *AC* ma zatem długość $6\sqrt{13}$.
Odpowiedź: Długość dłuższej przekątnej tego równoległoboku jest równa $6\sqrt{13}$.

<u>Uwaga</u>
Długość dłuższej przekątnej równoległoboku możemy też obliczyć inaczej. Poprowadźmy wysokość równoległoboku z wierzchołka *A* na prostą *BC* tak, jak na rysunku poniżej.



Czworokąt *AEBD* jest prostokątem, więc $|AE| = |DB| = 12$ oraz $|EB| = |AD| = 9$.
Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta *AEC* obliczamy długość przekątnej *AC*
$$|AC|^2 = |AE|^2 + |EC|^2,$$

$$|AC|^2 = 12^2 + 18^2 = 468.$$

Stąd

$$|AC| = \sqrt{468} = 6\sqrt{13}.$$

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze równanie z jedną niewiadomą wiążące długości boków równoległoboku i długość krótszej przekątnej, np.:

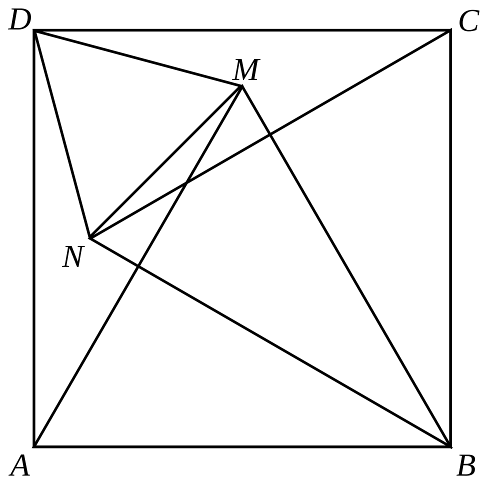
$(x+3)^2 = (x-3)^2 + x^2$, gdzie x oznacza długość krótszej przekątnej równoległoboku.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

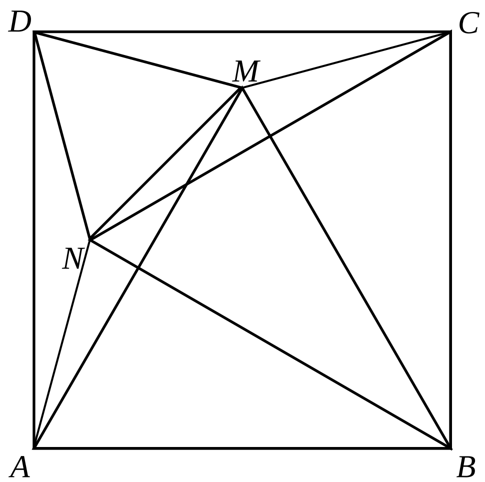
gdy obliczy długość dłuższej przekątnej równoległoboku: $\sqrt{468} = 6\sqrt{13}$.

Zadanie 25. ***(2pkt)***

Wewnątrz kwadratu *ABCD* wybrano takie punkty *M* i *N*, że trójkąty *ABM* i *BCN* są równoboczne (zobacz rysunek). Udowodnij, że trójkąt *DNM* jest równoboczny.



Dowód



Ponieważ $|AD| = |AM| = |AB| = |BN| = |BM| = |BC| = |CN| = |CD|$, więc trójkąty *DAM, NBM* i *NCD* są równoramienne. Pokażemy, że są to trójkąty przystające.

Ponieważ $|\sphericalangle DAB| = 90^\circ$ i $|\sphericalangle MAB| = 60^\circ$, więc $|\sphericalangle DAM| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Tak samo wykazujemy, że $|\sphericalangle ABN| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle NBC| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$,

$$|\sphericalangle MBC| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ABM| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$|\sphericalangle NCD| = |\sphericalangle BCD| - |\sphericalangle BCN| = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ.$$

Teraz możemy obliczyć miarę kąta *NBM*

$$|\sphericalangle NBM| = |\sphericalangle ABC| - |\sphericalangle ABN| - |\sphericalangle MBC| = 90^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 30^\circ.$$

Pokazaliśmy zatem, że w każdym z trójkątów *DAM*, *NBM* i *NCD* dwa boki mają tę samą długość i kąt między tymi bokami ma tę samą miarę 30°. Stąd wynika (cecha bok-kąt-bok), że są to trójkąty przystające. Z przystawania tych trójkątów wynika z kolei równość $|DM| = |MN| = |ND|$, co oznacza, że trójkąt *DNM* jest równoboczny. To kończy dowód.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 pkt
gdy zapisze, że trójkąty *DAM*, *NBM* i *NCD* są przystające i nie uzasadni tego przystawania oraz wywnioskuje, że trójkąt *DMN* jest równoboczny.

Zdający otrzymuje ....2 pkt
gdy udowodni, że trójkąt *DMN* jest równoboczny.

Zadanie 26. ***(2pkt)***
Pierwszy odcinek łamanej ma długość 128 cm, a długość każdego następnego jej odcinka jest o 25% mniejsza od długości poprzedniego. Najkrótszy odcinek tej łamanej ma długość 40,5 cm. Oblicz, z ilu odcinków składa się ta łamana.

Rozwiązanie
Oznaczmy przez a_n długość *n*-tego odcinka łamanej. Ponieważ każdy kolejny odcinek łamanej jest o 25% krótszy od poprzedniego, więc $a_{n+1} = a_n - 25\% a_n = \frac{3}{4} a_n$. Oznacza to, że długości kolejnych odcinków łamanej tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q = \frac{3}{4}$.
Ponieważ $a_1 = 128$, $a_n = 40\frac{1}{2}$, więc ze wzoru $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ na *n*-ty wyraz ciągu geometrycznego otrzymujemy równanie

$$40\tfrac{1}{2} = 128 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Stąd mamy

$$\frac{81}{2} = 128 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},$$

$$\frac{81}{256} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1},$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{4} = \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Zatem $n - 1 = 4$, czyli $n = 5$.
Odpowiedź: Łamana składa się z pięciu odcinków.

<u>Uwaga</u>
Możemy po kolei obliczać długości kolejnych odcinków łamanej. Wtedy drugi odcinek ma długość $128 - 25\% \cdot 128 = \frac{3}{4} \cdot 128 = 96$, trzeci $96 - 25\% \cdot 96 = \frac{3}{4} \cdot 96 = 72$, czwarty $72 - 25\% \cdot 72 = \frac{3}{4} \cdot 72 = 54$, piąty $54 - 25\% \cdot 54 = \frac{3}{4} \cdot 54 = \frac{81}{2} = 40{,}5$. Kolejne odcinki są coraz krótsze, więc łamana składa się z pięciu odcinków.

Schemat punktowania

Zdający otrzymuje ....1 pkt

gdy zapisze, że długości kolejnych odcinków łamanej tworzą ciąg geometryczny o ilorazie $q=\frac{3}{4}$.

Zdający otrzymuje ....2 pkt

gdy obliczy liczbę odcinków łamanej.

Zadanie 27. ***(4pkt)***

Ze zbioru $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ losujemy kolejno dwa razy po jednej liczbie bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia, że iloczyn wylosowanych liczb będzie podzielny przez 6 lub przez 10.

Rozwiązanie

Pierwszy sposób

Możemy przyjąć, że zdarzeniem elementarnym jest uporządkowana para liczb (x, y) taka, że $x, y \in \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ i $x \neq y$. Wówczas mamy do czynienia z modelem klasycznym, w którym

$$\begin{aligned}\Omega=\{&(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(2,7),(2,8),\\ &(3,2),(3,4),(3,5),(3,6),(3,7),(3,8),\\ &(4,2),(4,3),(4,5),(4,6),(4,7),(4,8),\\ &(5,2),(5,3),(5,4),(5,6),(5,7),(5,8),\\ &(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,7),(6,8),\\ &(7,2),(7,3),(7,4),(7,5),(7,6),(7,8),\\ &(8,2),(8,3),(8,4),(8,5),(8,6),(8,7)\}\end{aligned}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$.

Niech A oznacza zdarzenie, że wylosujemy taką parę liczb, że ich iloczyn będzie podzielny przez 6 lub przez 10. Wypiszmy wszystkie takie pary ze zbioru Ω. Zatem

$$A=\{\begin{array}{llllll}(2,3), & & (2,5), & (2,6), & & \\ (3,2), & (3,4), & & (3,6), & & (3,8), \\ & (4,3), & (4,5), & (4,6), & & \\ (5,2), & & (5,4), & (5,6), & & (5,8), \\ (6,2), & (6,3), & (6,4), & (6,5), & (6,7), & (6,8), \\ & & & & (7,6), & \\ & (8,3), & & (8,5), & (8,6), & \}\end{array}.$$

Tych par jest 24, czyli $|A| = 24$.

Prawdopodobieństwa zdarzenia A jest zatem równe

$$P(A)=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania pary liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6 lub przez 10 jest równe $\frac{4}{7}$.

Uwaga

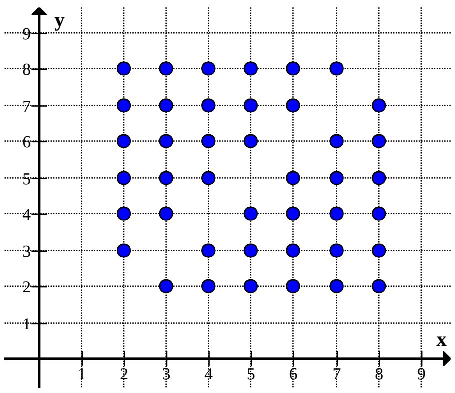
Możemy również zdarzenia wszystkie zdarzenia elementarne potraktować jako pola odpowiedniej tabeli (lewa tabela).

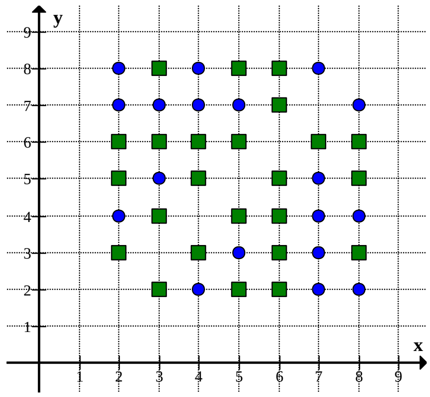
	2	3	4	5	6	7	8
2	X						
3		X					
4			X				
5				X			
6					X		
7						X	
8							X

	2	3	4	5	6	7	8
2	X	**6**	8	**10**	**12**	14	16
3	**6**	X	**12**	15	**18**	21	**24**
4	8	12	X	**20**	**24**	28	32
5	**10**	15	**20**	X	**30**	35	**40**
6	**12**	**18**	**24**	**30**	X	**42**	**48**
7	14	21	28	35	**42**	X	56
8	16	**24**	32	**40**	**48**	56	X

W pola tej tabeli możemy wpisać odpowiednie iloczyny. W ten sposób od razu „widzimy” zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu *A* (prawa tabela).

Możemy też zaznaczyć w prostokątnym układzie współrzędnych na płaszczyźnie wszystkie zdarzenia elementarne (lewy rysunek) oraz zaznaczyć na tym rysunku te, które sprzyjają zdarzeniu *A* (prawy rysunek)





Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 7 \cdot 6 = 42$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Wypisanie co najmniej 13 zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*, przy czym wśród wypisanych par nie może być żadnej pary nie sprzyjającej zdarzeniu *A*.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*: $|A| = 24$.

Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{4}{7}$.

Drugi sposób

Możemy przyjąć, że zdarzeniem elementarnym, jest dwuelementowy podzbiór $\{x, y\}$ zbioru siedmioelementowego $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Wówczas mamy do czynienia z modelem klasycznym, w którym

$$\begin{aligned}\Omega = \{&\{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{2,6\}, \{2,7\},\{2,8\},\\ &\{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}, \{3,7\}, \{3,8\},\\ &\{4,5\}, \{4,6\},\{4,7\}, \{4,8\},\\ &\{5,6\}, \{5,7\}, \{5,8\},\\ &\{6,7\}, \{6,8\},\\ &\{7,8\}\}\end{aligned}$$

Liczba wszystkich zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = 21$.

Niech *A* oznacza zdarzenie, że wylosujemy takie liczby, że ich iloczyn będzie podzielny przez 6 lub przez 10. Wypiszmy wszystkie zdarzenia elementarne, które sprzyjają zdarzeniu *A*. Wtedy

$$A = \{\{2,3\},\{2,5\},\{2,6\}, \{3,4\}, \{3,6\}, \{3,8\}, \{4,5\},\{4,6\}, \{5,6\},\{5,8\}, \{6,7\}, \{6,8\}\}.$$

Mamy 4 takie zdarzenia, czyli $|A| = 12$.

Prawdopodobieństwa zdarzenia *A* jest zatem równe

$$P(A) = \frac{12}{21} = \frac{4}{7}.$$

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo wylosowania pary liczb, których iloczyn jest podzielny przez 6 lub przez 10 jest równe $\frac{4}{7}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Obliczenie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $|\Omega| = 21$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Wypisanie co najmniej 7 zdarzeń elementarnych sprzyjający zdarzeniu *A*, przy czym wśród wypisanych zdarzeń elementarnych nie może być żadnego nie sprzyjającego zdarzeniu *A*.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie liczby zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu *A*: $|A| = 12$.

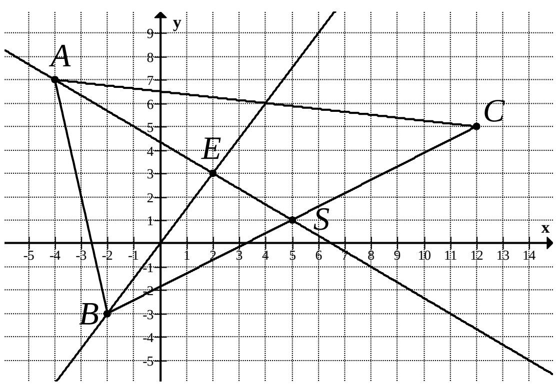
Rozwiązanie pełne ....4 pkt

Obliczenie prawdopodobieństwa zdarzenia *A*: $P(A) = \frac{4}{7}$.

Zadanie 28. ***(5pkt)***

Wierzchołki trójkąta *ABC* mają współrzędne: $A = (-4,7)$, $B = (-2,-3)$ i $C = (12,5)$. Punkt *S* jest środkiem boku *BC*. Prosta *AS* przecina prostą do niej prostopadłą i przechodzącą przez punkt *B* w punkcie *E*. Oblicz współrzędne punktu *E* i długość odcinka *SE*.

Rozwiązanie



Obliczmy najpierw współrzędne środka S odcinka BC

$$S=\left(\tfrac{-2+12}{2},\tfrac{-3+5}{2}\right)=\left(5,1\right).$$

Wyznaczmy równanie prostej AS wykorzystując wzór $\left(y-y_A\right)\left(x_S-x_A\right)-\left(y_S-y_A\right)\left(x-x_A\right)=0$:

$$\left(y-7\right)\left(5+4\right)-\left(1-7\right)\left(x+4\right)=0,$$

$$9\left(y-7\right)+6\left(x+4\right)=0,$$

$$2x+3y-13=0,$$

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}.$$

Prosta prostopadła do prostej AS i przechodząca przez punkt B ma więc równanie

$$y=\frac{3}{2}\left(x+2\right)-3,$$

$$y=\frac{3}{2}x.$$

Współrzędne punktu E obliczymy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x \\ y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3} \end{cases}.$$

Porównując prawe strony równań dostajemy równanie

$$\frac{3}{2}x=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3},$$

$$9x=-4x+26,$$

$$13x=26,$$

$$x=2.$$

Stąd

$$y=\frac{3}{2}\cdot 2=3.$$

Zatem $E=\left(2,\,3\right)$.

Pozostaje jeszcze obliczyć długość odcinka SE

$$\left|SE\right|=\sqrt{\left(x_E-x_S\right)^2+\left(y_E-y_S\right)^2}=\sqrt{\left(2-5\right)^2+\left(3-1\right)^2}=\sqrt{13}.$$

Odpowiedź. $E=\left(2,\,3\right)$, $\left|SE\right|=\sqrt{13}$.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu S: $S=\left(5,1\right)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Wyznaczenie równania prostej AS, np. w postaci: $y=-\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Wyznaczenie równania prostej BE, np. w postaci: $y=\frac{3}{2}x$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

Obliczenie współrzędnych punktu E: $E=\left(2,\,3\right)$.

Rozwiązanie pełne ....5 pkt

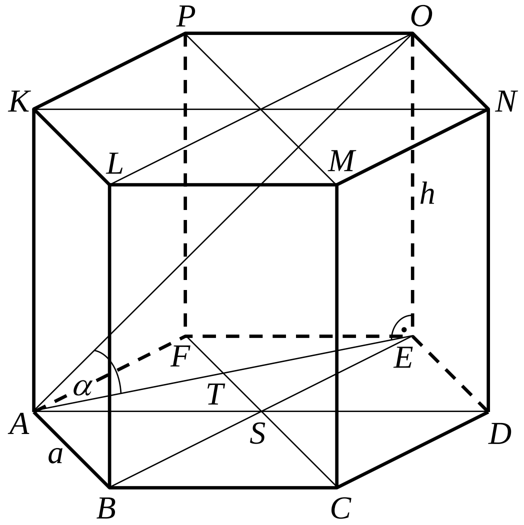
Obliczenie długość odcinka SE: $\left|SE\right|=\sqrt{13}$.

Zadanie 29. ***(4pkt)***

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego (zobacz rysunek) jest równe $60\sqrt{3}$. Krótsza przekątna tego graniastosłupa tworzy z płaszczyzną podstawy kąt α taki, że $\mathrm{tg}\alpha = 2$. Oblicz długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa.

Rozwiązanie

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Zaznaczmy kąt α między krótszą przekątną *AO* graniastosłupa a płaszczyzną jego podstawy.



Podstawa graniastosłupa jest złożona z sześciu przystających trójkątów równobocznych o boku długości *a*. Odcinki *AT* i *TE* to wysokości dwóch z tych trójkątów. Zatem

$$|AE| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}.$$

Trójkąt *AOE* jest prostokątny. Zatem

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{|OE|}{|AE|} = \frac{h}{a\sqrt{3}}.$$

Ponieważ wiemy, że $\mathrm{tg}\alpha = 2$, więc

$$\frac{h}{a\sqrt{3}} = 2,$$

$$h = 2a\sqrt{3}.$$

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe $60\sqrt{3}$, ale

$$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6ah = 3a^2\sqrt{3} + 6ah,$$

więc

$$3a^2\sqrt{3} + 6ah = 60\sqrt{3},$$

$$a^2\sqrt{3} + 2ah = 20\sqrt{3}.$$

Wykorzystując wcześniej otrzymaną zależność między *a* i *h* otrzymujemy równanie

$$a^2\sqrt{3} + 2a \cdot 2a\sqrt{3} = 20\sqrt{3},$$

$$5a^2\sqrt{3} = 20\sqrt{3},$$

$$a^2 = 4.$$

Stąd $a = 2$.

Odpowiedź: Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa 2.

Schemat punktowania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zaznaczenie kąta nachylenia krótszej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy i zapisanie jednej z zależności między długością podstawy oraz wysokością graniastosłupa, np.:

$$\frac{h}{a\sqrt{3}} = 2 \text{ lub } 2\cdot 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6ah = 60\sqrt{3} \text{ lub } \left(\frac{h}{p} = 2 \text{ i } p = 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$$

<u>Uwaga</u>

Zdający nie musi zaznaczać tego kąta, o ile przyjmie oznaczenia potrzebnych mu długości odcinków, opisze te oznaczenia, a z dalszego toku rozwiązania wynika, że poprawnie interpretuje kąt nachylenia krótszej przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny jego podstawy.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie układu równań, z którego można otrzymać równanie z jedną niewiadomą, np.:

$$2\cdot 6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6ah = 60\sqrt{3} \quad \text{i} \quad h = 2a\sqrt{3}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.:

$$a^2\sqrt{3} + 2a\cdot 2a\sqrt{3} = 20\sqrt{3}.$$

Rozwiązanie bezbłędne ....4 pkt

Obliczenie długości krawędzi podstawy graniastosłupa: $a = 2$.

Zadanie 30. ***(5pkt)***

Do zbiornika o pojemności 800 m^3 można doprowadzić wodę dwiema rurami. W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza do zbiornika o 32 m^3 wody więcej niż druga rura. Czas napełniania zbiornika tylko pierwszą rurą jest o 12 godzin i 30 minut krótszy od czasu napełniania tego zbiornika tylko drugą rurą. Oblicz, w ciągu ilu godzin pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie.

Rozwiązanie

<u>Pierwszy sposób</u>

Oznaczmy przez *t* czas w godzinach, w jakim napełni się pusty zbiornik, gdy woda będzie doprowadzana do niego tylko pierwszą rurą.

Wtedy czas, w jakim napełniony zostałby pusty zbiornik, gdyby woda doprowadzana była do niego tylko drugą rurą byłby równy ($t + 12\frac{1}{2}$) godziny.

Ponieważ pojemność zbiornika jest równa 800 m^3, więc w ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza $\frac{800}{t}$ m^3, a druga $\frac{800}{t+12\frac{1}{2}}$ m^3 wody. Pierwsza rura w ciągu godziny dostarcza o 32 m^3 więcej wody niż druga rura

$$\frac{800}{t} = \frac{800}{t+12\frac{1}{2}} + 32.$$

Dzieląc obie strony tego równania przez 32 mamy

$$\frac{25}{t} = \frac{25}{t+12\frac{1}{2}} + 1.$$

Mnożąc teraz obie strony tego równania przez $t\left(t+12\frac{1}{2}\right)$, a następnie przekształcając je równoważnie, dostajemy kolejno

$$25\left(t+12\tfrac{1}{2}\right) = 25t + t\left(t+12\tfrac{1}{2}\right),$$

$$25t+\frac{625}{2}=25t+t^2+\frac{25}{2}t,$$

$$t^2+\frac{25}{2}t-\frac{625}{2}=0,$$

$$2t^2+25t-625=0.$$

Rozwiązujemy otrzymane równanie kwadratowe obliczając kolejno jego wyróżnik i pierwiastki

$$\Delta=25^2-4\cdot2\cdot(-625)=625+8\cdot625=9\cdot625,\ \sqrt{\Delta}=\sqrt{9\cdot625}=3\cdot25=75$$

$$t=\frac{-25-75}{2\cdot2}=-25 \text{ lub } t=\frac{-25+75}{2\cdot2}=\frac{25}{2}=12\tfrac{1}{2}$$

Pierwsze z otrzymanych rozwiązań nie spełnia warunków zadania (czas nie może być liczbą ujemną).

Gdy $t=12\frac{1}{2}$, to wtedy w ciągu godziny pierwsza rura dostarcza $\frac{800}{t}=\frac{800}{12\frac{1}{2}}=64\ \text{m}^3$ wody,

a druga $\frac{800}{t+12\frac{1}{2}}=\frac{800}{25}=32\ \text{m}^3$, więc obie rury w ciągu godziny dostarczają $64+32=96\ \text{m}^3$ wody. Stąd czas, w jakim pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie jest równy $\frac{800}{96}=\frac{25}{3}=8\frac{1}{3}$ godziny, czyli 8 godzin i 20 minut.

Schemat punktowania pierwszego sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie zależności między pojemnością zbiornika, czasem jego napełniania przez jedną z rur i wydajnością tej rury, np.:

W ciągu jednej godziny pierwsza rura dostarcza $\frac{800}{t}$ m^3.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie zależności między pojemnością zbiornika, czasem jego napełniania przez drugą z rur i wydajnością tej rury, np.:

W ciągu jednej godziny druga rura dostarcza $\frac{800}{t+12\frac{1}{2}}$ m^3.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.:

$$\frac{800}{t}=\frac{800}{t+12\frac{1}{2}}+32.$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.:

$$2t^2+25t-625=0.$$

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt

Obliczenie czasu, w jakim pusty zbiornik zostanie napełniony, gdy woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie: 8 godzin i 20.

Drugi sposób

Oznaczmy przez t czas w godzinach, w jakim napełni się pusty zbiornik, gdy woda będzie doprowadzana do niego tylko pierwszą rurą, natomiast przez v oznaczmy ilość wody w m^3 dostarczanej do zbiornika tą rurą. Wtedy czas w godzinach, w jakim napełni się pusty zbiornik, gdy woda będzie doprowadzana do niego tylko drugą rurą jest równy $(t+12\frac{1}{2})$ godziny, natomiast w ciągu godziny druga rura dostarcza $(v-32)$ m^3 wody. Pojemność zbiornika jest równa 800 m^3, więc otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} vt = 800 \\ (v-32)\left(t+12\frac{1}{2}\right) = 800 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy ten układ

$$\begin{cases} vt = 800 \\ vt + 12\frac{1}{2}v - 32t - 400 = 800 \end{cases},$$

$$\begin{cases} vt = 800 \\ 800 + 12\frac{1}{2}v - 32t - 400 = 800 \end{cases},$$

$$\begin{cases} vt = 800 \\ 12\frac{1}{2}v - 32t - 400 = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} vt = 800 \\ t = \frac{25}{64}v - \frac{25}{2} \end{cases}.$$

Stąd

$$v\left(\frac{25}{64}v - \frac{25}{2}\right) = 800,$$

$$\frac{25}{64}v^2 - \frac{25}{2}v - 800 = 0.$$

Mnożąc obie strony równania przez $\frac{64}{25}$ otrzymujemy równanie

$$v^2 - 32v - 64 \cdot 32 = 0.$$

Możemy je rozwiązać np. metodą grupowania

$$v^2 - 64v + 32v - 64 \cdot 32 = 0,$$

$$v(v-64) + 32(v-64) = 0,$$

$$(v+32)(v-64) = 0.$$

Ponieważ z warunków zadania wynika, że $v > 0$, więc czynnik $v+32$ jest dodatni. Stąd $v = 64$. Wtedy druga rura w ciągu godziny dostarcza $v-32 = 64-32 = 32$ m^3 wody, więc obie jednocześnie dostarczają w ciągu godziny $64+32 = 96$ m^3 wody.

Czas, w jakim pusty zbiornik zostanie napełniony, jeśli woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie jest zatem równy $\frac{800}{96} = \frac{25}{3} = 8\frac{1}{3}$ godziny, czyli 8 godzin i 20 minut.

Schemat punktowania drugiego sposobu rozwiązania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania ....1 pkt

Zapisanie zależności między pojemnością zbiornika, czasem jego napełniania przez jedną z rur i wydajnością tej rury, np.:

$$vt = 800 \text{ lub } (v-32)\left(t+12\tfrac{1}{2}\right) = 800.$$

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ....2 pkt

Zapisanie układu równań z dwiema niewiadomymi, np.:

$$\begin{cases} vt = 800 \\ (v-32)\left(t+12\frac{1}{2}\right) = 800 \end{cases}.$$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania ....3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą, np.:

$$v\left(\frac{25}{64}v - \frac{25}{2}\right) = 800.$$

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) ....4 pkt

Doprowadzenie do równania kwadratowego z jedną niewiadomą, np.:

$$v^2 - 32v - 64\cdot 32 = 0.$$

Rozwiązanie bezbłędne ....5 pkt

Obliczenie czasu, w jakim pusty zbiornik zostanie napełniony, gdy woda będzie doprowadzana przez obie rury jednocześnie: 8 godzin i 20 minut.