GazetaEdukacja.pl

gazeta EDUKACJA

PONIEDZIAŁEK 23 KWIETNIA 2012

DODATEK DO „GAZETY WYBORCZEJ” REDAGUJE: AGNIESZKA ZAWISTOWSKA

Matura z matematyki

POZIOM PODSTAWOWY

ZADANIA ZAMKNIĘTE

Zadanie 1. (1 pkt)

Najmniejszą liczbą spełniającą nierówność $|x-1| \le 4$ jest

A. -5 **B.** -3 **C.** 0 **D.** 5

Zadanie 2. (1 pkt)

Za samochód przy zakupie w kredycie 40/60 (tzn. wpłaca się 40% ceny samochodu, a na pozostałe 60% ceny udzielany jest kredyt) należy zapłacić 24000 zł. Całkowita cena tego samochodu jest równa

A. 33600 zł **B.** 40000 zł **C.** 52000 zł **D.** 60000 zł

Zadanie 3. (1 pkt)

Jeżeli $\sqrt[3]{x} = 5\sqrt[3]{7}$, to

A. $x = 35$ **B.** $x = 175$ **C.** $x = 875$ **D.** $x = 1715$

Zadanie 4. (1 pkt)

Liczba $\frac{4^9 \cdot 16^7}{8^5 \cdot 32^5}$ jest równa

A. 2^2 **B.** 2^5 **C.** 2^6 **D.** 2^8

Zadanie 5. (1 pkt)

Liczba $\left(2-\sqrt{2}\right)^2 - \left(2+\sqrt{2}\right)^2$ jest równa

A. $-8\sqrt{2}$ **B.** -4 **C.** $8\sqrt{2}$ **D.** 4

Zadanie 6. (1 pkt)

Liczba $\log 10^5 - \log_5 125$ jest równa

A. $\log_5 1{,}25$ **B.** $\log_5 80$ **C.** 2 **D.** 80

Zadanie 7. (1 pkt)

W firmie zatrudnionych jest pięć osób. Każda z nich otrzymuje inne wynagrodzenie. Mediana płac w tej firmie jest równa 2500 zł. Wskaż zdanie <u>fałszywe</u>.

A. W tej firmie jedna osoba zarabia 2500 zł.
B. W tej firmie dwie osoby zarabiają powyżej 2500 zł.
C. Gdyby w tej firmie zatrudniono jeszcze jedną osobę z wynagrodzeniem 2800 zł, to mediana płac byłaby wtedy równa 2800 zł.
D. Gdyby w tej firmie zatrudniono jeszcze jedną osobę z wynagrodzeniem 2500 zł, to mediana płac pozostałaby bez zmiany.

Zadanie 8. (1 pkt)

Stopień wielomianu $W(x) = (x-2)^2(3x-1)(5x^2+4)$ jest równy

A. 4 **B.** 5 **C.** 6 **D.** 8

Zadanie 9. (1 pkt)

Układ równań $\begin{cases} ay-4x=-2 \\ 4x+5y=2 \end{cases}$ jest układem nieoznaczonym, jeśli

A. 5 **B.** 4 **C.** -4 **D.** -5

Zadanie 10. (1 pkt)

Punkt $\left(\sqrt{2},-6\right)$ należy do wykresu funkcji $y = 2\sqrt{2}x + b$, gdy współczynnik b jest równy

A. $-13\sqrt{2}$ **B.** -10 **C.** 10 **D.** $13\sqrt{2}$

Zadanie 11. (1 pkt)

Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 24, a suma dwóch początkowych wyrazów tego ciągu jest równa 32. Iloraz tego ciągu jest równy

A. $\frac{1}{3}$ **B.** $\frac{3}{4}$ **C.** 3 **D.** $\frac{4}{3}$

Zadanie 12. (1 pkt)

W ciągu arytmetycznym $a_1 = 3$, $r = -\frac{2}{5}$. Szesnasty wyraz tego ciągu jest równy

A. $2\frac{2}{5}$ **B.** $-\frac{6}{5}$ **C.** -3 **D.** $-3\frac{2}{5}$

Zadanie 13. (1 pkt)

Średnia arytmetyczna liczb $x, y, z, t, 12$ jest równa 28. Wobec tego średnia arytmetyczna liczb x, y, z, t jest równa

A. 40 **B.** 32 **C.** 20 **D.** 16

Zadanie 14. (1 pkt)

Punkt $D = (2,-1)$ jest wierzchołkiem trapezu $ABCD$. Podstawa AB tego trapezu zawiera się w prostej $y = 2x+1$. Zatem podstawa CD tego trapezu zawarta jest w prostej

A. $y = \frac{1}{2}x - 2$ **B.** $y = \frac{1}{2}x - 1$ **C.** $y = 2x - 3$ **D.** $y = 2x - 5$

Zadanie 15. (1 pkt)

Proste $y = \frac{4}{3}x - 2$ oraz $y = -kx + 2$ są prostopadłe. Zatem

A. $k = -\frac{4}{3}$ **B.** $k = \frac{4}{3}$ **C.** $k = \frac{3}{4}$ **D.** $k = -\frac{3}{4}$

Zadanie 16. (1 pkt)

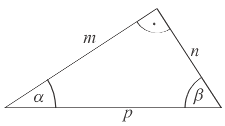
Liczba, która jest miejscem zerowym funkcji $y = -\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$, jest również miejscem zerowym funkcji

A. $y = x + \frac{4}{3}$ **B.** $y = 4x - 3$ **C.** $y = 3x - 4$ **D.** $y = 3x + 4$

Zadanie 17. (1 pkt)

Zgodnie z poniższym rysunkiem stosunek $\frac{m}{p}$ jest równy

A. $\sin\alpha$

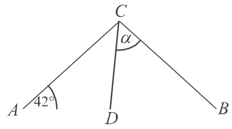


B. $\cos\beta$
C. $\operatorname{tg}\alpha$
D. $\sin\beta$

Zadanie 18. (1 pkt)

W trójkącie równoramiennym ABC, w którym $|AC| = |BC|$ oraz $|\angle CAB| = 42^\circ$, poprowadzono odcinek CD taki, że $|CD| = |AD|$ (zobacz rysunek). Miara zaznaczonego kąta α jest równa

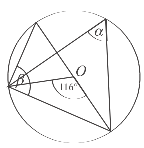
A. 42^o
B. 54^o
C. 69^o
D. 84^o



Zadanie 19. (1 pkt)

Suma miar kątów α i β zaznaczonych na rysunku, gdzie punkt O jest środkiem okręgu, jest równa

A. 116^o
B. 138^o
C. 148^o
D. 180^o



Zadanie 20. (1 pkt)

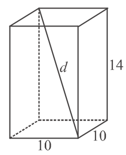
Jeżeli promień podstawy stożka zwiększymy 3 razy, a wysokość tego stożka zmniejszymy 3 razy, to otrzymamy stożek, którego objętość

A. nie zmieni się.
B. jest 3 razy większa.
C. jest 3 razy mniejsza.
D. jest 9 razy większa.

Zadanie 21. (1 pkt)

Długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego (zobacz rysunek) jest równa

A. $6\sqrt{11}$
B. $18\sqrt{11}$
C. $2\sqrt{74}$
D. 20



Zadanie 22. (1 pkt)

Ile liczb trzycyfrowych, w których żadna cyfra się nie powtarza, możemy utworzyć ze zbioru cyfr $\{3,5,6,7,8,9\}$?

A. 18 **B.** 120 **C.** 144 **D.** 216

ZADANIA OTWARTE

Zadanie 23. (2 pkt)

Jednym z miejsc zerowych funkcji $f(x) = ax^2 + bx + c$ jest $x = -1$, a osią symetrii paraboli będącej wykresem tej funkcji jest prosta $x=2$. Parabola przecina oś Oy w punkcie (0,2). Oblicz współczynnik a.

Dokończenie – s. 2 ▸▸▸

▸▸▸ Dokończenie ze s. 1

Zadanie 24. (2 pkt)

Napisz równania osi symetrii figury opisanej równaniami:

$$(x-4)^2+(y-2)^2=25$$
$$(x+1)^2+(y+3)^2=25$$

Zadanie 25. (2 pkt)

Wykaż, że jeżeli w trójkącie o bokach a, b, c zachodzi $a<b+c$, to wysokości h_1, h_2, h_3 opuszczone odpowiednio na boki a, b, c tego trójkąta spełniają nierówność:
$\frac{1}{h_1}<\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$.

Zadanie 26. (2 pkt)

Uzasadnij, że istnieje taki kąt ostry α, że $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$ i $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$.

Zadanie 27. (2 pkt)

W trójkącie różnobocznym ABC dwusieczne kątów przy wierzchołkach B i C przecinają się w punkcie O należącym do odcinka MN równoległego do boku BC i takiego, że $M\in AB$ i $N\in AC$. Udowodnij, że $|MN|=|MB|+|NC|$.

Zadanie 28. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $x^3-7x+6=0$.

Zadanie 29. (5 pkt)

Liczby 2, x, y w podanej kolejności tworzą ciąg arytmetyczny. Jeżeli drugą liczbę podwoimy, a trzecią zwiększymy o 62, to liczby te utworzą ciąg geometryczny. Wyznacz liczby x i y.

Zadanie 30. (5 pkt)

Z miast A i B wyjechały jednocześnie naprzeciw siebie dwa samochody, każdy z nich ze swoją stałą prędkością. Samochód, który wyjechał z A, w momencie mijania się, przejechał drogę o 20 km większą niż samochód, który wyjechał z B. Oblicz odległość między tymi miastami, jeżeli samochód z A do B jechał 2 godziny, natomiast drugi samochód z B do A jechał 2,5 godziny.

Zadanie 31. (4 pkt)

Stożek i walec mają równe długości tworzących, równe pola powierzchni bocznych i równe objętości. Oblicz cosinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy.

ODPOWIEDZI

Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zad.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Odp.	B	D	C	C	A	C	C	B	D	B	A	C	B	D	C	C	D	B	C	B	A	B

Szkice rozwiązań zadań otwartych

Zadanie 23.

Ponieważ prosta $x=2$ jest osią symetrii paraboli i jednym z miejsc zerowych funkcji kwadratowej jest $x=-1$, to drugim miejscem zerowym jest liczba $x=5$. Zapisujemy wzór tej funkcji kwadratowej w postaci iloczynowej:

$y=a(x+1)(x-5)$

Ponieważ punkt (0,2) należy do wykresu, zatem mamy:

$2=-5a$ czyli $a=-\frac{2}{5}$.

Zadanie 24.

Figura opisana w zadaniach składa się z dwóch okręgów o jednakowych promieniach $r=5$: jeden z nich ma środek w punkcie $S_1=(4,2)$, a drugi w punkcie $S_2=(-1,-3)$. Jedną osią symetrii jest prosta S_1S_2, która ma równanie:

$y-2=\frac{-3-2}{-1-4}(x-4)$ czyli $y=x-2$.

Drugą osią symetrii jest symetralna odcinka S_1S_2, tzn. prosta prostopadła do prostej S_1S_2 i przechodząca przez środek odcinka S_1S_2: $\left(\frac{4-1}{2},\frac{2-3}{2}\right)=\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$, czyli $y=-x+1$.

Odp. Osiami symetrii są proste: $y=x-2$ oraz $y=-x+1$.

Zadanie 25.

Pole tego trójkąta możemy zapisać:

$P=\frac{1}{2}a\cdot h_1$ lub $P=\frac{1}{2}b\cdot h_2$ lub $P=\frac{1}{2}c\cdot h_3$

Stąd $a=\frac{2P}{h_1}$, $b=\frac{2P}{h_2}$, $c=\frac{2P}{h_3}$.

Ponieważ z założenia $a<b+c$, zatem
$\frac{2P}{h_1}<\frac{2P}{h_2}+\frac{2P}{h_3}$

Dzieląc obie strony nierówności przez $2P$, otrzymujemy
$\frac{1}{h_1}<\frac{1}{h_2}+\frac{1}{h_3}$.

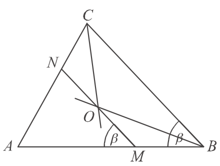
Zadanie 26.

Ze wzoru $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ obliczamy $\cos\alpha$:

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{5}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Zatem $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sqrt{5}}{5}:\frac{2\sqrt{5}}{5}=\frac{1}{2}$.

Zadanie 27.



Niech $|\angle ABC|=\beta$.

Ponieważ $MN\parallel BC$,

więc $|\angle AMN|=\beta$.

Zatem $|\angle OMB|=180^\circ-\beta$.

Ponieważ $|\angle MBO|=\frac{1}{2}\beta$,

więc $|\angle MOB|=180^\circ-\left(180^\circ-\beta+\frac{1}{2}\beta\right)=\frac{1}{2}\beta$. Zatem trójkąt OMB jest trójkątem równoramiennym, w którym $|MO|=|MB|$.

Analogicznie dowodzimy, że trójkąt CNO jest trójkątem równoramiennym, w którym $|ON|=|NC|$.

Ponieważ $|MN|=|MO|+|ON|$, zatem $|MN|=|MB|+|NC|$.

Zadanie 28.

Podstawiamy $-7x=-x-6x$ i rozkładamy lewą stronę równania na czynniki:

$x^3-x-6x+6=0$

$x(x^2-1)-6(x-1)=0$

$x(x-1)(x+1)-6(x-1)=0$

Wyłączamy wspólny czynnik $x-1$ przed nawias:

$(x-1)[x(x+1)-6]=0$

$(x-1)(x^2+x-6)=0$

Stąd $x-1=0$ lub $x^2+x-6=0$.

Zatem $x=1$ lub $x=-2$ lub $x=3$.

Zadanie 29.

Z faktu, że liczby 2, x, y tworzą ciąg arytmetyczny, otrzymujemy równanie:

$x-2=y$ czyli $y=2x-2$

Po podwojeniu drugiej liczby i zwiększeniu trzeciej o 62 otrzymujemy ciąg geometryczny, zatem

$\frac{2x}{2}=\frac{y+62}{2x}$ czyli $2x^2=y+62$

Mamy układ równań: $\begin{cases}y=2x-2\\2x^2=y+62\end{cases}$

Rozwiązując go, otrzymujemy równanie kwadratowe

$x^2-x-30=0$

którego pierwiastkami są liczby $x_1=-5$ oraz $x_2=6$. Zatem

$\begin{cases}x=-5\\y=-12\end{cases}$ lub $\begin{cases}x=6\\y=10\end{cases}$

Zadanie 30.

Oznaczmy: x - odległość między miastami A i B (w km)

y - liczba kilometrów przebyta przez samochód jadący z A do B do momentu minięcia się samochodów

Samochód jadący z B do A w tym samym czasie przejechał $y-20$ km, więc $y+y-20=x$ czyli $x=2y-20$

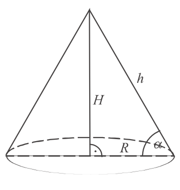
Prędkość samochodu jadącego z A do B była równa $\frac{x}{2}$, a prędkość samochodu jadącego z B do A była równa $\frac{x}{2{,}5}$.

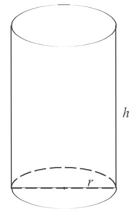
Do momentu minięcia się czas jazdy obu samochodów był taki sam, zatem mamy równanie: $\frac{y}{\frac{x}{2}}=\frac{y-20}{\frac{x}{2{,}5}}$

czyli $2y=2{,}5(y-20)$

Rozwiązaniem otrzymanego równania jest $y=100$, więc $x=180$ km.

Zadanie 31.





Oznaczmy: h - długość tworzącej stożka i walca, H - wysokość stożka, r - promień walca, R - promień stożka

Pola powierzchni bocznych stożka i walca są równe, zatem $\pi R\cdot h=2\pi rh$

Stąd $R=2r$

Objętości stożka i walca też są równe, więc $\frac{1}{3}\pi R^2\cdot H=\pi r^2\cdot h$

Uwzględniając, że $R=2r$ otrzymujemy $\frac{1}{3}\pi\cdot 4r^2\cdot H=\pi r^2\cdot h$

Zatem $h=\frac{4}{3}H$.

Obliczamy sinus kąta nachylenia tworzącej stożka do płaszczyzny podstawy: $\sin\alpha=\frac{H}{h}=\frac{H}{\frac{4}{3}H}=\frac{3}{4}$

Ze wzoru $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ obliczamy $\cos\alpha$:

$\cos\alpha=\sqrt{1-\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

Uwaga: $\cos\alpha$ możemy również obliczyć, obliczając R z wykorzystaniem twierdzenia Pitagorasa:

$R=\sqrt{\left(\frac{4}{3}H\right)^2-H^2}=\frac{\sqrt{7}}{3}H$

Wtedy $\cos\alpha=\frac{R}{h}=\frac{\frac{\sqrt{7}}{3}H}{\frac{4}{3}H}=\frac{\sqrt{7}}{4}$