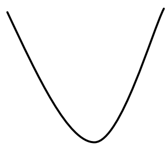
Przykładowe rozwiązania zadań – poziom rozszerzony

Zadanie 1.

(a_n) – ciąg arytmetyczny o różnicy r, $r \in R$



$a_1 = 1$, $a_2 = 1 + 2r$, $a_3 = 1 + 3r$

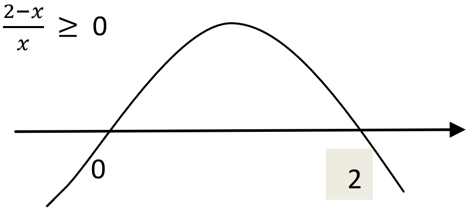
$S = a_1a_3 + a_2a_3 = 1 \cdot (1 + 2r) + (1 + r)(1 + 2r) = 2r^2 + 5r + 2$

Funkcja S jest trójmianem kwadratowym, wartość najmniejszą osiąga dla r = $\frac{-5}{4}$ = - 1,25.

Zadanie 2.

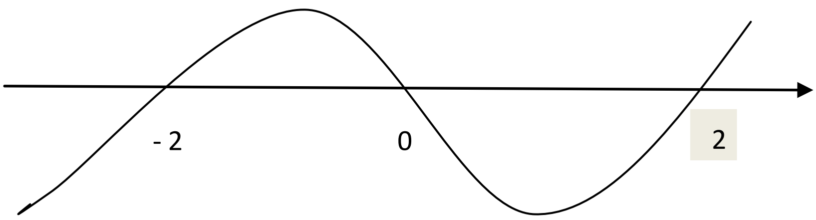
Wyznaczam rozwiązanie nierówności $\frac{2}{x} \geq 1$, $x \neq 0$

$\frac{2-x}{x} \geq 0$



Zatem A = $(0, 2 >$

Wyznaczam zbiór B: $x^3 < 4x$, $x^3 - 4x < 0$, $x(x - 2)(x + 2) < 0$



Otrzymujemy B = $(-\infty, -2) \cup \{0, 2)$

Ostatecznie A – B = { 2}.

Zadanie 3.

$$\begin{cases} \sin(x + y) = -\frac{1}{2} \\ y - 2x = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

Po rozwiązaniu pierwszego równania otrzymamy:

$$\begin{cases} x + y = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ y = 2x + \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x + y = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \\ y = 2x + \frac{\pi}{6} \end{cases} \quad k \in C$$

stąd

$3x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ lub $3x = \pi + 2k\pi$

$x = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$ $x = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}$

uwzględniając założenia $x \in < 0, 2\pi >$, $y \in < 0, 2\pi >$, mamy

k	1	2
x	$\frac{5}{9}\pi$	$\frac{11}{9}\pi$
y	$\frac{23}{18}\pi$	$\frac{47}{18}\pi > 2\pi$

k	0	1
x	$\frac{1}{3}\pi$	π
y	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{13}{6}\pi > 2\pi$

Rozwiązaniem układu równań są dwie pary liczb: $\begin{cases} x = \frac{5}{9}\pi \\ y = \frac{23}{18}\pi \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\pi \\ y = \frac{5}{6}\pi \end{cases}$.

Zadanie 4.

Rozwiązuję równanie kwadratowe z parametrem $m \in C$

$x^2 + mx + m - 1 = 0$

$\Delta = m^2 - 4m + 4 = (x-2)^2$ zatem dla każdej wartości całkowitej m równanie ma co najmniej jedno rozwiązanie $\sqrt{\Delta} = |m-2|$, $x_1 = \frac{-m-|m-2|}{2}$, $x_2 = \frac{-m+|m-2|}{2}$

Rozpatruję przypadki :

1^0 $m \geq 2$

$x_1 = \frac{-m-m+2}{2} = -m + 1 \in C$

$x_2 = \frac{-m+m-2}{2} = -1 \in C$

2^0 $m < 2$

$x_1 = \frac{-m+m-2}{2} = -1 \in C$

$x_2 = \frac{-m-m+2}{2} = -m + 1 \in C$

Zatem dla każdej liczby całkowitej m rozwiązania tego równania są liczbami całkowitymi.

Zadanie 5.

$|y+2| + 1 \geq |x-2|$.

1^0 $x \geq 2$ i $y \geq -2$

$Y + 2 + 1 \geq x - 2$

$Y \geq x - 5$

2^0 $x \geq 2$ i $y < -2$

$-y - 2 + 1 \geq x - 2$

$y \leq -x + 1$

3^0 $x < 2$ i $y \geq -2$

$y + 2 + 1 \geq -x + 2$

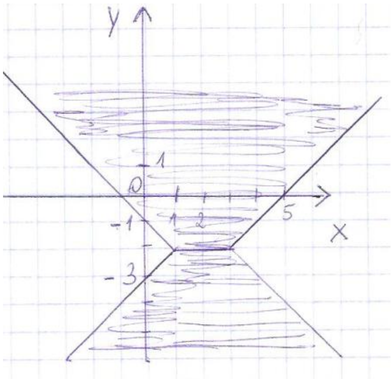
$y \geq -x - 1$

4^0 $x < 2$ i $y < -2$

$-y - 2 + 1 \geq -x + 2$

$y \leq x - 3$

Po uwzględnieniu wszystkich założeń i przypadków otrzymujemy zbiór :



Zadanie 6.

Wyznaczam środki i promienie okręgów: $S_1(m, 2)$ $r_1 = \sqrt{5}$ i $S_2(7, -m)$ $r_2 = 2\sqrt{5}$

Obliczam $|S_1 S_2| = \sqrt{(m-7)^2 + (2+m)^2} = \sqrt{2m^2 - 10m + 53}$

Okręgi są styczne zewnętrznie, gdy $\sqrt{2m^2 - 10m + 53} = 3\sqrt{5}$. Obie strony równania są dodatnie, zatem po podniesieniu do kwadratu otrzymujemy równanie $2m^2 - 10m + 8 = 0$. Rozwiązaniem równania są liczby $m_1 = 1$ oraz $m_2 = 4$.

Obliczam współrzędne punktu styczności dla m = 4 rozwiązując układ równań:

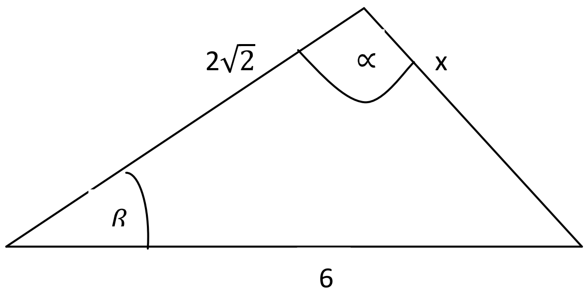
$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-2)^2 = 5 \\ (x-7)^2 + (y+4)^2 = 20 \end{cases}$$

Odejmujemy równanie stronami i otrzymujemy $6x - 12y = 30$, zatem $x = 2y + 5$

Po podstawieniu do równania $(2y + 5 - 4)^2 + (y-2)^2 = 5$ i przekształceniu otrzymuję $y = 0$, stąd $x = 5$. Punkt styczności ma współrzędne (5, 0).

Zadanie 7.

Ustalam oznaczenia, jak na rysunku.



Z twierdzenia cosinusów $x^2 = (2\sqrt{2})^2 + 6^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 6 \cdot \cos 45^0$

Zatem $x = 2\sqrt{5}$, ponieważ $6 > 2\sqrt{5} > 2\sqrt{2}$ największą miarę ma kąt α. Ponownie korzystam z twierdzenia cosinusów: $6^2 = (2\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{5})^2 - 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{5} \cos\alpha$ i po przekształceniu otrzymuję

$\cos \propto = -\frac{\sqrt{10}}{10} < 0$, stąd $\propto$ jest kątem rozwartym, a trójkąt ABC jest rozwartokątny.

Zadanie 8.

f(x) = $\frac{x}{x^2+4}$ x∈ R

Niech a, b ∈ C i $a \neq b$, wtedy f(a) = $\frac{a}{a^2+4}$ a f(b) = $\frac{b}{b^2+4}$

Rozwiązuję równanie $\frac{a}{a^2+4}$ = $\frac{b}{b^2+4}$, po przekształceniu otrzymuję: $ab^2 + 4a = a^2b + 4b$, grupując wyrazy równanie otrzymuje postać $(a-b)(ab-4) = 0$, zatem $a = b$ lub $ab = 4$

Pierwsze równanie nie spełnia założeń , drugie ma postać $b = \frac{4}{a}$ i $a \neq 0$

Liczba a jest dzielnikiem całkowitym liczby 4 i $a \neq b$

a	1	- 1	2	- 2	4	-4
b	4	- 4	2	- 2	1	- 1

Szukane pary różnych liczb całkowitych to (1, 4), (-1, - 4), (4, 1), (- 4, - 1).

Zadanie 9.

n – ilość piłek białych, n∈ N_+

2n – ilość piłek czerwonych

$$|\Omega| = C_{3n}^2 = \binom{3n}{2} = \frac{(3n-1)\cdot 3n}{2}$$

Niech zdarzenie A oznacza – „wylosowano dwie piłki czerwone” |A| = $C_{2n}^2 = \binom{2n}{2} = \frac{(2n-1)\cdot 2n}{2}$

P(A) = $\frac{(2n-1)\cdot 2n}{(3n-1)\cdot 3n}$ = $\frac{7}{16}$, po rozwiązaniu otrzymujemy n = 11.

W pudełku jest 11 piłek białych i 22 piłki czerwone.

Niech B oznacza zdarzenie – „ wylosowano piłki różnokolorowe”, wtedy
$|\Omega| = C_{33}^2 = \binom{33}{2} = \frac{32\cdot 33}{2}$ oraz |B| = $C_{11}^1 \cdot C_{22}^1 = 11 \cdot 22$

Zatem P(B) = $\frac{11\cdot 22}{\frac{32\cdot 33}{2}}$ = $\frac{11}{24}$.

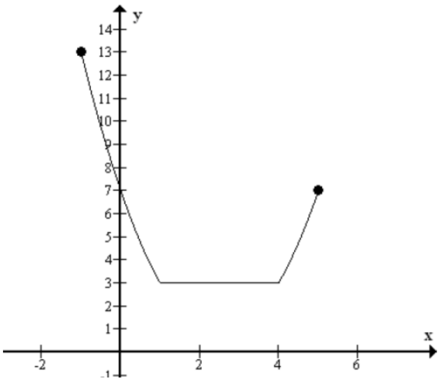
Zadanie 10.

f(- 1) = max (13, 3) = 13,

f(1) = max (3, 3) = 3,

f(5) = max (7, 3) = 7

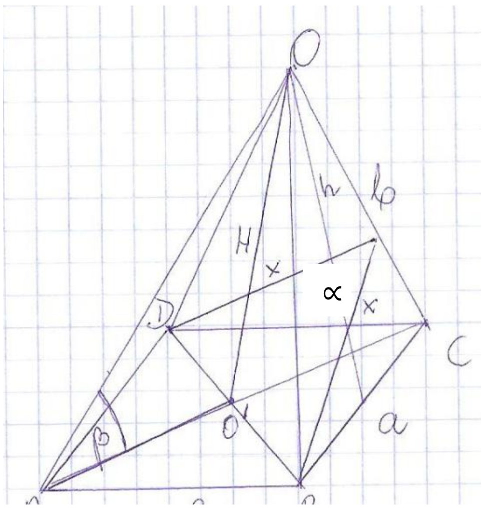
Wykres funkcji f



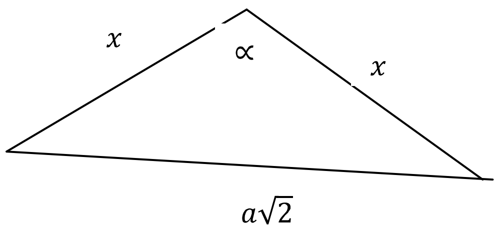
Zbiór wartości funkcji: < 3, 13>.

Zadanie 11.

Przyjmuję oznaczenia tak, jak n rysunku. a>0, b > 0, x>0, h >0, H > 0 i $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$



Korzystam z twierdzenia cosinusów

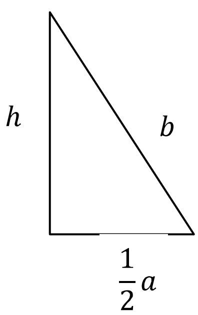


$2a^2 = 2x^2 - 2x^2 \cos \propto$

$2a^2 = 2x^2 - 2x^2 \cdot (-\frac{1}{7})$

Zatem $a^2 = \frac{8}{7}x^2$

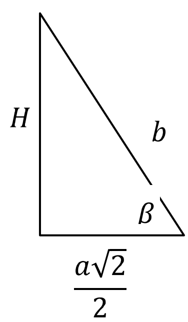
Z twierdzenia Pitagorasa



$b^2 = h^2 + \frac{a^2}{4}$ oraz $bx = ah$

Otrzymujemy zależności:

$h = \frac{bx}{a}$ oraz $a = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ stąd b $=\sqrt{2}a$



Obliczam $\cos\beta = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{b} = \frac{1}{2}$, szukany kąt β ma miarę 60^0.