OKRĘGOWA KOMISJA EGZAMINACYJNA W POZNANIU

Materiał ćwiczeniowy z matematyki

Poziom podstawowy

Styczeń 2012

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych oraz schemat oceniania

KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Odpowiedź	C	D	A	B	C	D	C	B	B	B	A	D	B	D	B	C	B	B	A	A	D	C	B

MODEL OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 24. (0 - 2)

Rozwiąż równanie $x^3 - 2x^2 - 13x + 26 = 0$.

I sposób rozwiązania (metoda grupowania)

Przekształcamy lewą stronę równania do postaci iloczynowej, stosując metodę grupowania wyrazów.

$x^2(x-2) - 13(x-2) = 0$ lub $x(x^2-13) - 2(x^2-13) = 0$

$(x^2-13)(x-2) = 0$

Stąd $x = \sqrt{13}$ lub $x = -\sqrt{13}$ lub $x = 2$.

II sposób rozwiązania (metoda dzielenia)

Stwierdzamy, że liczba 2 jest pierwiastkiem wielomianu $x^3 - 2x^2 - 13x + 26$.

Dzielimy wielomian $x^3 - 2x^2 - 13x + 26$ przez dwumian $x - 2$.

Zatem $(x^2-13)(x-2) = 0$. Stąd $x = \sqrt{13}$ lub $x = -\sqrt{13}$ lub $x = 2$.

III sposób rozwiązania (schemat Hornera)

Szukamy pierwiastka wśród całkowitych dzielników wyrazu wolnego $\{-26, -13, -2, -1, 1, 2, 13, 26\}$. Stwierdzamy, że pierwiastkiem jest liczba 2.

Wykorzystując schemat Hornera

	1	-2	-13	26
2	1	0	-13	0

wyznaczamy iloraz z dzielenia wielomianu $x^3 - 2x^2 - 13x + 26$ przez dwumian $x - 2$: $x^2 - 13$.

Zatem $(x^2-13)(x-2) = 0$. Stąd $x = \sqrt{13}$ lub $x = -\sqrt{13}$ lub $x = 2$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1pkt

gdy:

- zapisze równanie w postaci iloczynowej: $x^2(x-2)-13(x-2)=0$

  lub $x(x^2-13)-2(x^2-13)=0$

albo

- podzieli wielomian $x^3-2x^2-13x+26$ przez dwumian $(x-2)$ otrzymując iloraz: x^2-13.

Zdający otrzymuje 2pkt

gdy wyznaczy bezbłędnie wszystkie rozwiązania równania: $x=\sqrt{13}$ lub $x=-\sqrt{13}$ lub $x=2$.

Zadanie 25. (0 - 2)

Udowodnij, że suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest liczbą parzystą.

I sposób rozwiązania

Zapisujemy dwie kolejne liczby nieparzyste w postaci $2n+1$ oraz $2n+3$, gdzie n należy do zbioru liczb całkowitych.

Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest równa $(2n+1)^2+(2n+3)^2$.

Przekształcając wyrażenie otrzymujemy:

$4n^2+4n+1+4n^2+12n+9=8n^2+16n+10=2(4n^2+8n+5)$.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy dwie kolejne liczby nieparzyste w postaci $2n-1$ oraz $2n+1$, gdzie n należy do liczb całkowitych.

Suma kwadratów dwóch kolejnych liczb nieparzystych jest równa $(2n-1)^2+(2n+1)^2$.

Przekształcając wyrażenie otrzymujemy:

$4n^2-4n+1+4n^2+4n+1=8n^2+2=2(4n^2+1)$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1pkt

gdy zapisze wyrażenie w postaci $(2n+1)^2+(2n+3)^2$ lub $(2n-1)^2+(2n+1)^2$, gdzie n należy do zbioru liczb całkowitych.

Zdający otrzymuje 2pkt

gdy przekształci wyrażenie $(2n+1)^2+(2n+3)^2$ lub $(2n-1)^2+(2n+1)^2$ do postaci $2k$, gdzie k należy do zbioru liczb całkowitych.

Uwaga

Jeżeli zdający sprawdzi prawdziwość twierdzenia dla konkretnych wartości, to otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 26. (0 - 2)

Wyznacz sumę wszystkich dwucyfrowych parzystych liczb naturalnych.

Rozwiązanie

Dwucyfrowe parzyste liczby naturalne tworzą ciąg arytmetyczny, w którym $a_1 = 10$, $r = 2$, $n = 45$.

Obliczamy sumę tych liczb, korzystając ze wzoru na sumę n początkowych wyrazów ciągu arytmetycznego: $S_{45} = \frac{a_1 + a_{45}}{2} \cdot 45 = \frac{a_1 + a_1 + (45-1) \cdot r}{2} \cdot 45 = 2430$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1pkt
gdy zapisze $a_1 = 10$, $r = 2$, $n = 45$.

Zdający otrzymuje 2pkt
gdy wyznaczy $S_{45} = 2430$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający poda tylko sumę, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający wypisze wszystkie dwucyfrowe parzyste liczby naturalne i poda ich sumę, to otrzymuje **2 punkty**.

Zadanie 27. (0 - 2)

Wyznacz miarę kąta ostrego α, dla którego wyrażenie $\frac{\cos^3 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha}$ ma wartość 2.

I sposób rozwiązania

Zapisujemy równanie $\frac{\cos^3 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2$.

Przekształcamy lewą stronę, wyłączając wspólny czynnik przed nawias i stosując „jedynkę” trygonometryczną, otrzymujemy $\frac{\cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2$.

Stąd $\cos \alpha = \frac{1}{2}$.

Zatem $\alpha = 60°$.

II sposób rozwiązania

Zapisujemy równanie $\frac{\cos^3 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha}{\cos^2 \alpha} = 2$.

Mnożąc obustronnie przez $\cos^2 \alpha$ otrzymujemy $\cos^3 \alpha + \sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha$.

Dzielimy obustronnie przez $\cos \alpha$ ($\cos \alpha > 0$) otrzymując $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 2\cos \alpha$.

Lewa strona równania jest „jedynką" trygonometryczną, więc $1 = 2\cos\alpha$. Stąd $\cos\alpha = \frac{1}{2}$.

Zatem $\alpha = 60°$.

<u>Schemat oceniania</u>

Zdający otrzymuje 1pkt

- gdy przekształci równanie $\frac{\cos^3\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = 2$ do postaci : $\frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = 2$.

albo

- gdy przekształci równanie $\frac{\cos^3\alpha + \sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha} = 2$ do postaci :

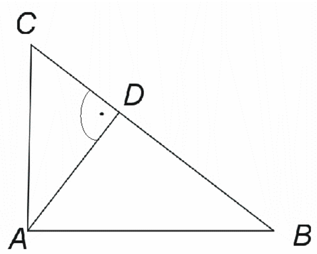
  $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 2\cos\alpha$

Zdający otrzymuje 2pkt

gdy obliczy $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ i poda rozwiązanie: $\alpha = 60°$.

Zadanie 28. (0 - 2)

Trójkąt ABC jest prostokątny. Punkt D jest spodkiem wysokości opuszczonej na przeciwprostokątną BC oraz $|DC| = \frac{1}{3}|BD|$ (patrz rysunek). Wykaż, że $|\angle ABD| = 30^0$.



<u>I sposób rozwiązania</u>

Zauważamy, że trójkąty ADC i BDA są podobne (cecha *kk*, $|\angle ACD| = |\angle BAD|$ oraz $|\angle DAC| = |\angle DBA|$). Zatem $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{|DC|}{|AD|}$, skąd $|AD|^2 = |BD| \cdot |DC|$.

Ponieważ $|DC| = \frac{1}{3}|BD|$, więc $|AD|^2 = |BD| \cdot \frac{1}{3}|BD|$.

Po przekształceniu otrzymujemy $\left(\frac{|AD|}{|BD|}\right)^2 = \frac{1}{3}$, stąd mamy $\frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Z definicji funkcji tangens kąta ABD w ΔBDA mamy: $tg|\angle ABD| = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zatem $|\angle ABD| = 30°$.

Schemat oceniania I sposobu rozwiązania:

Zdający otrzymuje 1pkt

gdy zapisze $|AD|^2 = |BD| \cdot \frac{1}{3}|BD|$.

Zdający otrzymuje 2pkt

gdy wykaże, że $|\angle ABD| = 30^\circ$.

Uwaga

Zdający nie musi wykazywać podobieństwa ΔADC i ΔBDA.

II sposób rozwiązania

Korzystamy z własności wysokości w trójkącie prostokątnym, poprowadzonej z kąta prostego: $|AD|^2 = |BD| \cdot |DC|$.

Ponieważ $|DC| = \frac{1}{3}|BD|$, więc $|DC| = x$, $|BD| = 3x$.

Zatem $|AD|^2 = 3x^2$.

Stąd $|AD| = x\sqrt{3}$.

W trójkącie prostokątnym ABD obliczamy $tg|\angle ABD| = \frac{|AD|}{|BD|} = \frac{x\sqrt{3}}{3x} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Zatem $|\angle ABD| = 30^\circ$.

Schemat oceniania II sposobu rozwiązania:

Zdający otrzymuje 1pkt

gdy wyznaczy $|AD| = x\sqrt{3}$.

Zdający otrzymuje 2pkt

gdy wykaże, że $|\angle ABD| = 30^\circ$.

Zadanie 29. (0 - 2)

Wyznacz równania stycznych do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, równoległych do osi odciętych układu współrzędnych.

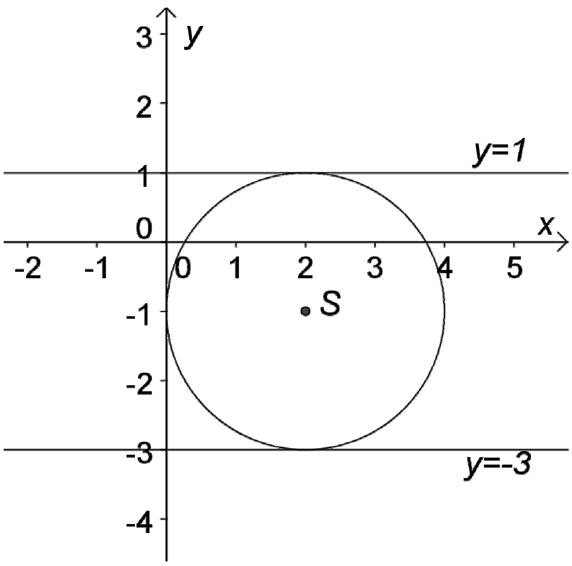
Rozwiązanie
Wyznaczamy współrzędne środka okręgu i długość jego promienia.

- Doprowadzamy równanie okręgu do postaci $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 2^2$. Stąd odczytujemy: $S = (2,-1)$ oraz $r = 2$.

albo

- Wykorzystujemy równanie okręgu i zapisujemy: $-2a = -4$, $-2b = 2$ oraz korzystamy ze wzoru $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Stąd $a = 2$ oraz $b = -1$, czyli $S = (2,-1)$.
  Obliczamy r: $r = \sqrt{2^2 + (-1)^2 - 1} = 2$.

Sporządzamy rysunek i odczytujemy równania stycznych: $y = 1$ i $y = -3$.



Schemat oceniania
Zdający otrzymuje 1pkt
gdy wyznaczy współrzędne środka okręgu i długość jego promienia: $S = (2,-1)$, $r = 2$.

Zdający otrzymuje 2pkt
gdy poda równania stycznych: $y = 1$ i $y = -3$.

Uwagi
1. Jeżeli zdający wyznaczy współrzędne środka okręgu z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy równania stycznych, to otrzymuje za całe rozwiązanie **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający wyznaczy długość promienia okręgu z błędem rachunkowym i konsekwentnie do popełnionego błędu wyznaczy równania stycznych, to otrzymuje za całe rozwiązanie **1 punkt**.

Zadanie 30. (0 - 4)

Wśród 150 mieszkańców pewnego osiedla przeprowadzono ankietę. Zadano pytanie, z jakiej sieci telefonii komórkowej korzystają. Wyniki badania przedstawiono w tabeli:

Sieć	Ile osób korzysta
„Krzyżyk”	75
„Kółko”	60

Okazało się, że wśród ankietowanych, 10 osób posiada telefony w obydwu sieciach. Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrana osoba spośród ankietowanych nie posiada telefonu w żadnej z wymienionych sieci. Wynik przedstaw w formie nieskracalnego ułamka.

<u>I sposób rozwiązania</u>

Oznaczmy zdarzenia:
A – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która jest abonentem sieci „Krzyżyk”,
B – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która jest abonentem sieci „Kółko”,
C – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie posiada telefonu w żadnej z wymienionych sieci.

Ankietę przeprowadzono wśród 150 osób, zatem $|\Omega| = 150$.

Ponieważ wśród ankietowanych występują osoby, korzystające z obu sieci, więc $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

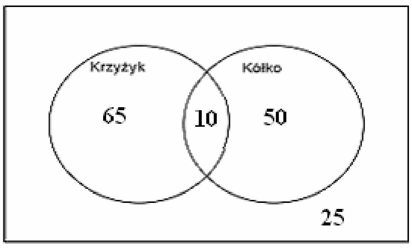
Stąd $|A \cup B| = 75 + 60 - 10 = 125$.

Zatem $|C| = |\Omega| - |A \cup B| = 25$.

$$P(C) = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$$

<u>II sposób rozwiązania</u>

Oznaczmy:
C – zdarzenie polegające na wylosowaniu osoby, która nie posiada telefonu w żadnej z wymienionych sieci.



$|\Omega| = 150$

Telefon, w co najmniej jednej z sieci, posiada $50 + 10 + 65 = 125$ osób.
Zatem $|C| = 150 - 125 = 25$.

Stąd $P(C) = \frac{25}{150} = \frac{1}{6}$.

__Schemat oceniania__

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania …………………………………………………………………..………. 1 pkt

Zapisanie $|\Omega| = 150$ lub opisanie liczby abonentów poszczególnych sieci telefonicznych, np. w postaci zbiorów.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp ………………………………..……….. 2 pkt

Wyznaczenie $|A \cup B|$: $|A \cup B| = 125$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania …………………………………..…. 3 pkt

Wyznaczenie $|C|$: $|C| = 25$.

Rozwiązanie pełne …………………………………………..………………….. 4 pkt

Wyznaczenie prawdopodobieństwa w postaci ułamka nieskracalnego: $P(C) = \frac{1}{6}$.

__Uwagi__

1. Jeżeli zdający poda tylko wynik $P(C) = \frac{1}{6}$, to otrzymuje **0 punktów.**
2. Jeśli zdający rozwiąże zadanie do końca i $P(C) > 1$ lub $P(C) < 0$, to otrzymuje za całe rozwiązanie **0 punktów.**
3. Jeżeli zdający wyznaczy poprawnie $P(C)$, np. $P(C) = \frac{25}{150}$, $P(C) = \frac{5}{30}$, i nie przedstawi wyniku w postaci ułamka nieskracalnego, to otrzymuje maksymalnie **3 punkty**.
4. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy wyznaczaniu $|A \cup B|$ **lub** $|C|$, i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie do końca, to otrzymuje maksymalnie **3 punkty**.

Zadanie 31. (0 - 5)

Liczba *a* jest o 3 większa od liczby *b*. Iloraz liczb *a* i *b* jest dwa razy mniejszy od sumy tych liczb. Wyznacz liczby *a* i *b*.

__Rozwiązanie__

Liczba *a* jest o 3 większa od liczby *b*, zatem $a = b + 3$.

Iloraz liczb *a* i *b* jest dwa razy mniejszy od sumy tych liczb, zatem $\frac{a}{b} = \frac{a+b}{2}$ i $b \neq 0$.

Rozwiązując układ równań: $\begin{cases} a = b + 3 \\ \frac{a}{b} = \frac{a+b}{2} \end{cases}$, otrzymujemy równanie kwadratowe $2b^2 + b - 6 = 0$.

Rozwiązaniem równania jest $b = -2$ lub $b = 1{,}5$. Zatem $\begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 4{,}5 \\ b = 1{,}5 \end{cases}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1pkt

Zapisanie jednego z równań $a=b+3$ lub $\frac{a}{b}=\frac{a+b}{2}$ $(b\neq 0)$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2pkt

Zapisanie układu równań: $\begin{cases} a=b+3 \\ \frac{a}{b}=\frac{a+b}{2} \end{cases}$

Pokonanie zasadniczych trudności zadania... 3pkt

Doprowadzenie układu równań do postaci równania kwadratowego: $2b^2+b-6=0$ i rozwiązanie go: $b=-2$ lub $b=1{,}5$.

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)... 4pkt

- doprowadzenie układu równań do równania kwadratowego z błędem rachunkowym i konsekwentne do popełnionego błędu rozwiązanie zadania do końca

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z błędem rachunkowym i konsekwentne do popełnionego błędu rozwiązanie zadania do końca.

Rozwiązanie bezbłędne .... 5 pkt

Podanie wartości liczb a i b: $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a=4{,}5 \\ b=1{,}5 \end{cases}$.

Zadanie 32. (0 - 6)

Mamy dwa pojemniki: pierwszy ma kształt sześcianu, drugi - ostrosłupa prawidłowego czworokątnego. Przekątna sześcianu ma długość $6\sqrt{2}\ cm$. Wysokość ostrosłupa tworzy ze ścianą boczną kąt o mierze $60°$. Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest równe $64\sqrt{3}\ cm^2$. Sprawdź na podstawie odpowiednich obliczeń, czy woda wypełniająca całkowicie pierwszy pojemnik zmieści się w drugim pojemniku.

Rozwiązanie

Strategia rozwiązania tego zadania sprowadza się do realizacji następujących etapów:

- narysowanie obu brył: sześcianu i ostrosłupa prawidłowego czworokątnego z zaznaczonym kątem pomiędzy wysokością a ścianą boczną,
- obliczenie długości krawędzi sześcianu,
- obliczenie krawędzi podstawy ostrosłupa i jego wysokości,
- obliczenie objętości obu brył i ich porównanie.

Rysujemy sześcian i wprowadzamy oznaczenia:

$|AB| = |BC| = a$ - długość krawędzi sześcianu,

$V_1 -$ objętość sześcianu.

W sześcianie przekątna ma długość $|BD'| = 6\sqrt{2}\ cm$.

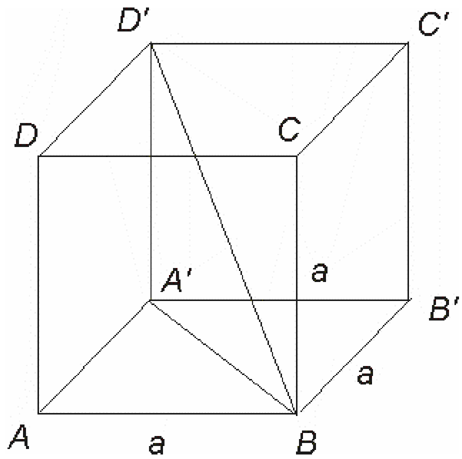
Wyznaczamy długość krawędzi a, korzystając z twierdzenia Pitagorasa w $\Delta BA'D'$:

$|A'D'|^2 + |A'B|^2 = |BD'|^2$

$a^2 + (a\sqrt{2})^2 = (6\sqrt{2})^2$

$3a^2 = 72$

Zatem $a = 2\sqrt{6}\ cm$.



Wyznaczamy objętość sześcianu: $V_1 = a^3 = (2\sqrt{6})^3 = 48\sqrt{6}\ cm^3 \approx 117{,}6\ cm^3$.

Rysujemy ostrosłup i wprowadzamy oznaczenia:

$|EF| = |FG| = b$ - długość krawędzi podstawy ostrosłupa,

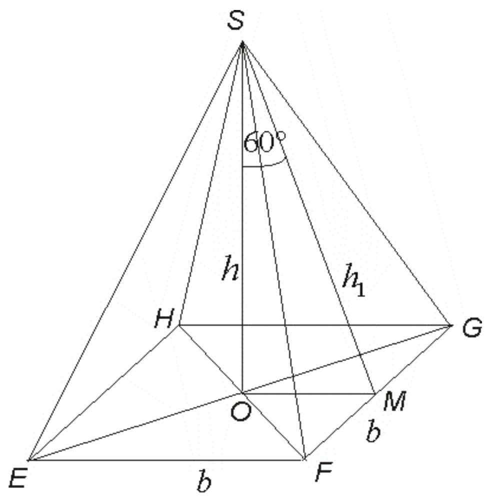
$|SO| = h$ - długość wysokości ostrosłupa,

$|SM| = h_1$ - długość wysokości ściany bocznej ostrosłupa,

$V_2 -$ objętość ostrosłupa.

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym pole powierzchni bocznej jest równe $P_b = 64\sqrt{3}$.

ΔSOM jest prostokątny, zatem $\sin 60^0 = \dfrac{\frac{b}{2}}{h_1}$.



Stąd $b = \sqrt{3}h_1$.

Ponieważ $P_b = 64\sqrt{3}$ i $P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_1$, więc $64\sqrt{3} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3}h_1 \cdot h_1$.

Zatem $h_1 = 4\sqrt{2}\ cm$, $b = 4\sqrt{6}\ cm$.

Obliczamy długość wysokości ostrosłupa h, korzystając

- z definicji funkcji tangens.

  $tg 60^0 = \dfrac{\frac{b}{2}}{h}$

  $h = 2\sqrt{2}\ cm$.

albo

- z twierdzenia Pitagorasa

  $h^2 + \left(2\sqrt{6}\right)^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2$

  $h = 2\sqrt{2}\ cm$.

Wyznaczamy objętość ostrosłupa $V_2 = \frac{1}{3} \cdot b^2 \cdot h = \frac{1}{3} \cdot (4\sqrt{6})^2 \cdot 2\sqrt{2} = 64\sqrt{2}\ cm^3 \approx 90{,}5\ cm^3$.

Ponieważ $V_1 > V_2$, stąd wniosek, że woda z pierwszego pojemnika nie zmieści się w drugim pojemniku.

Schemat oceniania:

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1pkt

- wyznaczenie długości krawędzi sześcianu: $a = 2\sqrt{6}\ cm$

albo

- zapisanie zależności pomiędzy długością krawędzi podstawy ostrosłupa a długością wysokości jego ściany bocznej: $b = \sqrt{3}h_1$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2pkt

- wyznaczenie objętości sześcianu V_1: $V_1 = 48\sqrt{6}\ cm^3 \approx 117{,}6\ cm^3$

albo

- wyznaczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa b: $b = 4\sqrt{6}\ cm$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania.. 4pkt

Wyznaczenie objętości sześcianu i ostrosłupa:

$V_1 = 48\sqrt{6}\ cm^3 \approx 117{,}6\ cm^3$, $V_2 = 64\sqrt{2}\ cm^3 \approx 90{,}5\ cm^3$

Rozwiązanie zadania do końca, lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe)... 5pkt

- wyznaczenie długości krawędzi sześcianu z błędem rachunkowym i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania zadania do końca

albo

- wyznaczenie długości wysokości ściany bocznej ostrosłupa z błędem rachunkowym i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania zadania do końca

albo

- wyznaczenie długości krawędzi podstawy ostrosłupa z błędem rachunkowym i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania zadania do końca

albo

- wyznaczenie objętości sześcianu z błędem rachunkowym i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania zadania do końca

albo

- wyznaczenie objętości ostrosłupa z błędem rachunkowym i konsekwentne doprowadzenie rozwiązania zadania do końca

Rozwiązanie pełne.. 6pkt

Porównanie objętości obu brył i wyciągnięcie wniosku: woda z pierwszego pojemnika nie zmieści się w drugim pojemniku.

Uwagi

1. Jeżeli zdający wyznaczy objętość sześcianu i długość krawędzi podstawy ostrosłupa i na tym poprzestanie, to otrzymuje maksymalnie **3 punkty**.
2. Jeżeli zdający obliczy tylko objętość ostrosłupa i na tym poprzestanie, to otrzymuje maksymalnie **3 punkty**.