

Materiał ćwiczeniowy z matematyki
Poziom podstawowy
Styczeń 2011

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania

KLUCZ ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
Odpowiedź	A	D	C	B	D	C	A	A	D	B	A	B	A	B	C	C	A	A	B	B	B	D

MODEL OCENIANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 23. (2 pkt)

Rzucamy dwa razy kostką do gry. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że w drugim rzucie wypadnie parzysta liczba oczek.

I sposób rozwiązania

Oznaczamy: A – zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu w drugim rzucie parzystej liczby oczek.

Obliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych tego doświadczenia $|\Omega| = 36$.

Obliczamy liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A : $|A| = 6 \cdot 3 = 18$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A : $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{1}{2}$.

II sposób rozwiązania

Oznaczamy: A – zdarzenie losowe polegające na wyrzuceniu w drugim rzucie parzystej liczby oczek.

Wypisujemy wszystkie możliwe wyniki doświadczenia i zaznaczamy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzaniu A .

(1, 1)	(2, 1)	(3, 1)	(4, 1)	(5, 1)	(6, 1)
(1, 2)	(2, 2)	(3, 2)	(4, 2)	(5, 2)	(6, 2)
(1, 3)	(2, 3)	(3, 3)	(4, 3)	(5, 3)	(6, 3)
(1, 4)	(2, 4)	(3, 4)	(4, 4)	(5, 4)	(6, 4)
(1, 5)	(2, 5)	(3, 5)	(4, 5)	(5, 5)	(6, 5)
(1, 6)	(2, 6)	(3, 6)	(4, 6)	(5, 6)	(6, 6)

Zliczamy liczbę wszystkich zdarzeń elementarnych oraz zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A :

$|\Omega| = 36$ i $|A| = 18$.

Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A : $P(A) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$.

Prawdopodobieństwo zdarzenia A jest równe $P(A) = \frac{1}{2}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- poprawnie obliczy $|\Omega| = 36$ i $|A| = 18$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- poprawnie wypisze wszystkie zdarzenia elementarne oraz poprawnie zaznaczy wszystkie zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu polegającemu na wyrzuceniu w drugim rzucie parzystej liczby oczek i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy poda prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A: $P(A) = \frac{1}{2}$.

Uwaga

1. Jeżeli zdający błędnie wyznaczy $|\Omega|$ (np. $|\Omega| = 6$) lub $|A|$ (np. $|A| = 3$), to przyznajemy **0 punktów** za całe zadanie.
2. Jeżeli zdający wyznaczy $P(A) > 1$ lub $P(A) < 0$, to przyznajemy **0 punktów** za całe zadanie.
3. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu $|\Omega|$ lub $|A|$ i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie, to przyznajemy **1 punkt**.

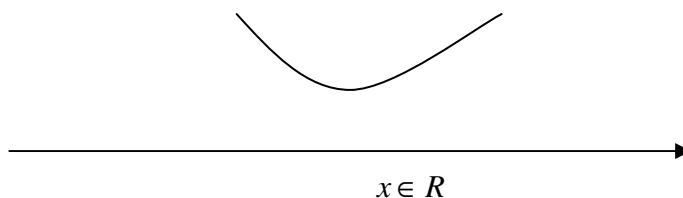
Zadanie 24. (2 pkt)

Rozwiąż nierówność $x^2 + x + 6 > 0$.

Rozwiązanie

Wyznaczamy wyróżnik trójmianu kwadratowego $x^2 + x + 6$: $\Delta = b^2 - 4ac = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = -23$.

$\Delta < 0$, zatem trójmian kwadratowy $x^2 + x + 6$ nie ma pierwiastków. Szkicujemy wykres paraboli $y = x^2 + x + 6$ i odczytujemy rozwiązanie.



Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy obliczy wyróżnik trójmianu kwadratowego $\Delta = -23$ i zauważy, że trójmian nie ma pierwiastków.

Zdający otrzymuje 2 pkt
gdy poda rozwiązanie nierówności: $x \in R$ (lub inny równoważny zapis).

Uwaga

1. Przyznajemy **0 punktów** zdającemu, który rozwiązuje nierówność inną niż w treści zadania.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu wyróżnika trójmianu kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże nierówność, to przyznajemy **1 punkt**.

Zadanie 25. (2 pkt)

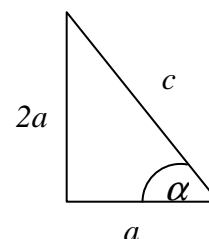
Kąt α jest kątem ostrym. Wiedząc, że $\operatorname{tg} \alpha = 2$, oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha}$.

I sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia:

- a – długość przyprostokątnej leżącej przy kącie α ,
- $2a$ – długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α ,
- c – długość przeciwprostokątnej.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2a}{a} = 2$$



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy

$$(2a)^2 + a^2 = c^2$$

$$4a^2 + a^2 = c^2$$

$$5a^2 = c^2$$

$$c = a\sqrt{5}$$

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy

$$\sin \alpha = \frac{2a}{c} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Stąd } \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{5}.$$

II sposób rozwiązania

$$\begin{cases} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \\ \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 2 \cos \alpha \\ (2 \cos \alpha)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \end{cases}$$

$$4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{5} \quad i \quad \cos \alpha > 0$$

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Stąd } \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Zatem } \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{5}$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{2} \\ \sin^2 \alpha + \left(\frac{\sin \alpha}{2}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

$$\sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha = 1$$

$$\frac{5}{4} \sin^2 \alpha = 1$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \quad i \quad \sin \alpha > 0$$

$$\sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{Stąd } \cos \alpha = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Zatem } \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\frac{1}{5}} = 2\sqrt{5}.$$

III sposób rozwiązania

Dla $\operatorname{tg} \alpha = 2$ odczytujemy z tablic trygonometrycznych: $\alpha \approx 63^\circ$.

Stąd $\sin 63^\circ \approx 0,891$ oraz $\cos 63^\circ \approx 0,454$.

$$\text{Zatem } \frac{\sin 63^\circ}{\cos^2 63^\circ} \approx \frac{0,891}{(0,454)^2} = \frac{0,891}{0,2062} \approx 4,321.$$

Schemat oceniania I, II i III sposobu oceniania

Zdający otrzymuje1 pkt

gdy:

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\sin \alpha$ i wykorzysta „jedynekę trygonometryczną”, np. $\cos \alpha = \frac{\sin \alpha}{2}$, $\sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \sin^2 \alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- przekształci dane wyrażenie do postaci wyrażenia zawierającego tylko $\cos \alpha$ i wykorzysta „jedynekę trygonometryczną”, np. $\sin \alpha = 2 \cos \alpha$, $4 \cos^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełni błąd

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (lub ich wielokrotności) nawet z błędem rachunkowym oraz zapisze $\sin \alpha = \frac{2a}{c} = \frac{2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ i na tym zakończy

albo

- obliczy długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych długości 1 i 2 (lub ich wielokrotności) z błędem rachunkowym oraz zapisze $\cos \alpha = \frac{a}{c} = \frac{a}{a\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$ i na tym zakończy

albo

- narysuje trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 1 i 2 (lub ich wielokrotności), obliczy długość przeciwprostokątnej i zaznaczy w tym trójkącie poprawnie kąt α

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta α : $\alpha \approx 63^\circ$ (akceptujemy wynik $\alpha \approx 64^\circ$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje2 pkt

gdy:

- obliczy wartość $\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} : \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$

albo

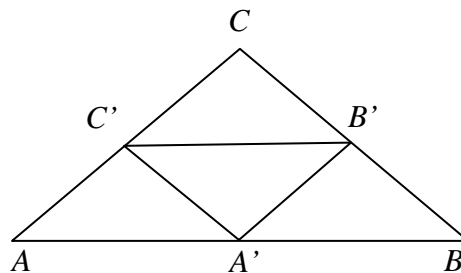
- obliczy przybliżoną wartość $\frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} : \frac{\sin 63^\circ}{\cos^2 63^\circ} \approx 4,321$.

Uwaga

1. Jeśli zdający przyjmie, że $\sin \alpha = 5$ i $\cos \alpha = 12$, to otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeśli zdający nie odrzuci odpowiedzi ujemnej, to otrzymuje **1 punkt**.
3. Za rozwiązanie, w którym zdający błędnie zaznaczy kąt α na rysunku i z tego korzysta oceniamy na **0 punktów**.

Zadanie 26. (2 pkt)

Punkty A' , B' , C' są środkami boków trójkąta ABC . Pole trójkąta $A'B'C'$ jest równe 4. Oblicz pole trójkąta ABC .

**Rozwiązanie**

Trójkąty ABC i $A'B'C'$ są podobne (cecha kkk). Ponieważ odcinek $C'B'$ łączy środki boków AC i BC , to $|AB| = 2|C'B'|$. Zatem skala podobieństwa przekształcającego trójkąt $A'B'C'$ na trójkąt ABC jest równa 2.

Obliczamy pole trójkąta ABC

$$P_{ABC} = 4P_{A'B'C'} = 16.$$

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy zauważy podobieństwo trójkątów i wyznaczy skalę podobieństwa: 2.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy poprawnie obliczy pole trójkąta ABC : $P_{ABC} = 16$.

Zadanie 27. (2 pkt)

Wykaż, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest liczbą podzielną przez 4.

Rozwiązanie

Wprowadzamy oznaczenia: $2n, 2n+2$ – kolejne liczby parzyste

$$(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 = 8n + 4 = 4(2n+1)$$

Zatem różnica $(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4(2n+1)$ jest liczbą podzielną przez 4.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy poprawnie zapisze różnicę kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych i poprawnie zastosuje wzór skróconego mnożenia: $(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2$.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy wykaże, że różnica kwadratów dwóch kolejnych liczb parzystych jest liczbą podzielną przez 4: $(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4(2n+1)$.

Zadanie 28. (2 pkt)

Proste o równaniach $y = -9x - 1$ i $y = a^2x + 5$ są prostopadłe. Wyznacz liczbę a .

Rozwiązanie

Proste o równaniach $y = -9x - 1$ i $y = a^2x + 5$ są prostopadłe, zatem ich współczynniki kierunkowe spełniają warunek $a_1 \cdot a_2 = -1$.

Ponieważ $a_1 = -9$, $a_2 = a^2$, to $a_1 \cdot a_2 = -9 \cdot a^2$.

Stąd $-9 \cdot a^2 = -1$

$$a^2 = \frac{-1}{-9}$$

$$a^2 = \frac{1}{9}$$

Zatem $a = \frac{1}{3}$ lub $a = -\frac{1}{3}$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt

gdy poprawnie zapisze warunek prostopadłości prostych: $-9 \cdot a^2 = -1$ lub $a^2 = \frac{1}{9}$.

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy obliczy i poda obie wartości a : $\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}$.

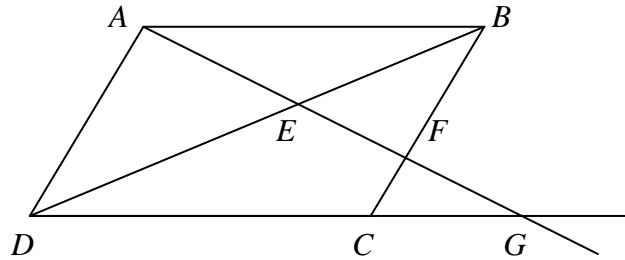
Zadanie 29. (2 pkt)

Prosta przechodząca przez wierzchołek A równoległoboku $ABCD$ przecina jego przekątną BD w punkcie E i bok BC w punkcie F , a prostą DC w punkcie G .

Udowodnij, że $|EA|^2 = |EF| \cdot |EG|$.

Rozwiązanie

Rysujemy równoległobok $ABCD$ i wprowadzamy oznaczenia



Trójkąty AEB i DEG są podobne (cecha kkk), więc $\frac{|EB|}{|ED|} = \frac{|EA|}{|EG|}$.

Trójkąty BEF i ADE również są podobne, więc $\frac{|EB|}{|ED|} = \frac{|EF|}{|EA|}$.

Zatem $\frac{|EA|}{|EG|} = \frac{|EF|}{|EA|}$. Stąd $|EA|^2 = |EF| \cdot |EG|$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje 1 pkt
gdy:

- zauważy podobieństwo trójkątów AEB i DEG i zapisze poprawny stosunek boków:

$$\frac{|EB|}{|ED|} = \frac{|EA|}{|EG|}$$

albo

- zauważy podobieństwo trójkątów BEF i ADE i zapisze poprawny stosunek boków:

$$\frac{|EB|}{|ED|} = \frac{|EF|}{|EA|}$$

Zdający otrzymuje 2 pkt

gdy zapisze, że $\frac{|EA|}{|EG|} = \frac{|EF|}{|EA|}$ i przekształci proporcję do postaci $|EA|^2 = |EF| \cdot |EG|$.

Zadanie 30. (4 pkt)

W trapezie równoramiennym $ABCD$ ramię ma długość 10. Obwód tego trapezu jest równy 40. Wiedząc, że tangens kąta ostrego w trapezie $ABCD$ jest równy $\frac{3}{4}$, oblicz długości jego podstaw.

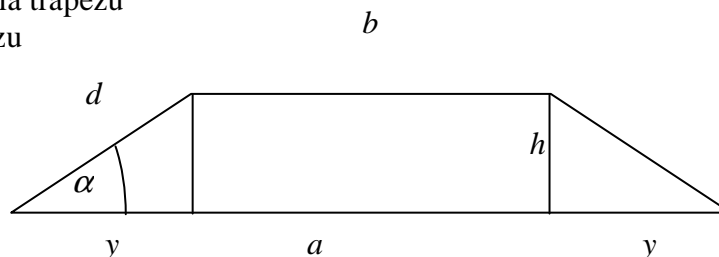
Rozwiązanie

Rysujemy trapez i wprowadzamy oznaczenia

a, b – długości podstaw trapezu

d – długość ramienia trapezu

h – wysokość trapezu



$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{4}$$

$$a = b + 2y$$

Obwód trapezu jest równy $a + b + 2d = 40$. Stąd $a + b = 20$.

Korzystając z twierdzenia Pitagorasa wyznaczamy długość odcinka y .

$$(h)^2 + (y)^2 = d^2$$

$$(3x)^2 + (4x)^2 = d^2$$

$$9x^2 + 16x^2 = 10^2$$

$$25x^2 = 100 \quad /: 25$$

$$x^2 = 4$$

$$x = 2$$

Stąd $4x = 8$.

Zatem $a = b + 2 \cdot 4x = b + 16$.

$$a + b = 20$$

$$b + 16 + b = 20$$

$$2b = 20 - 16$$

Stąd $b = 2$ i $a = 18$.

Podstawy trapezu $ABCD$ mają długości $a = 18$ i $b = 2$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Zapisanie równania wynikającego z obwodu: $a + b = 20$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Obliczenie długości odcinka y : $y = 8$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Obliczenie długości jednej z podstaw trapezu: $a = 18$ lub $b = 2$.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Obliczenie długości obu podstaw trapezu: $a = 18$ i $b = 2$.

Uwaga

1. Jeżeli zdający przyjmie, że $h = 3$ oraz $y = 4$ i konsekwentnie rozwiąże zadanie, to za całe rozwiązanie przyznajemy **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie, to przyznajemy **3 punkty**.

Zadanie 31. (6 pkt)

Trzy liczby tworzą ciąg arytmetyczny. Ich suma jest równa 15. Jeżeli pierwszą i trzecią liczbę pozostawimy bez zmian, a drugą pomniejszymy o jeden, to otrzymamy trzy kolejne wyrazy ciągu geometrycznego. Oblicz wyrazy ciągu arytmetycznego.

I sposób rozwiązania

Ciąg $(a_1, a_1 + r, a_1 + 2r)$ – jest ciągiem arytmetycznym.

Z treści zadania wynika, że $a_1 + a_1 + r + a_1 + 2r = 15$.

Stąd $3a_1 + 3r = 15$.

$$a_1 + r = 5$$

Ciąg $(a_1, a_1 + r - 1, a_1 + 2r)$ jest ciągiem geometrycznym. Zatem $(a_1 + r - 1)^2 = a_1(a_1 + 2r)$.

Rozwiązujemy układ równań
$$\begin{cases} a_1 + r = 5 \\ (a_1 + r - 1)^2 = a_1(a_1 + 2r) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + r = 5 \\ (5 - 1)^2 = a_1(a_1 + 2r) \end{cases} \quad \begin{cases} r = 5 - a_1 \\ (5 - 1)^2 = a_1(10 - a_1) \end{cases} \quad \begin{cases} r = 5 - a_1 \\ 16 = a_1(10 - a_1) \end{cases} \quad \begin{cases} r = 5 - a_1 \\ a_1^2 - 10a_1 + 16 = 0 \end{cases}$$

Rozwiązując równanie $a_1^2 - 10a_1 + 16 = 0$ otrzymujemy $a_1 = 2$ lub $a_1 = 8$.

$$\text{Zatem } \begin{cases} a_1 = 2 \\ r = 3 \end{cases} \text{ lub } \begin{cases} a_1 = 8 \\ r = -3 \end{cases}.$$

Obliczamy wyrazy ciągu arytmetycznego: $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = 8 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a_1 = 8 \\ a_2 = 5 \\ a_3 = 2 \end{cases}$.

II sposób rozwiązania

Ciąg (a, b, c) – jest ciągiem arytmetycznym.

Z treści zadania i własności ciągu arytmetycznego wynika, że $a + b + c = 15$ i $b = \frac{a+c}{2}$.

Ciąg $(a, b-1, c)$ jest ciągiem geometrycznym. Zatem $(b-1)^2 = a \cdot c$.

Rozwiązujemy układ równań $\begin{cases} a + b + c = 15 \\ b = \frac{a+c}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases}$

$$\begin{cases} a + \frac{a+c}{2} + c = 15 \\ b = \frac{a+c}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases} \quad \begin{cases} 3a + 3c = 30 \\ b = \frac{a+c}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases} \quad \begin{cases} a + c = 10 \\ b = \frac{a+c}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases} \quad \begin{cases} a + c = 10 \\ b = \frac{10}{2} \\ (b-1)^2 = a \cdot c \end{cases} \quad \begin{cases} a = 10 - c \\ b = 5 \\ (5-1)^2 = (10-c) \cdot c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 10 - c \\ b = 5 \\ 16 = 10c - c^2 \end{cases}$$

Rozwiązując równanie $c^2 - 10c + 16 = 0$ otrzymujemy $c_1 = 2$ lub $c_2 = 8$.

Po podstawieniu otrzymujemy ciąg arytmetyczny $\begin{cases} a = 8 \\ b = 5 \\ c = 2 \end{cases}$ lub $\begin{cases} a = 2 \\ b = 5 \\ c = 8 \end{cases}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania 1 pkt

- Wykorzystanie wzoru na n -ty wyraz ciągu arytmetycznego do zapisania wyrazów ciągu: a_1 , $a_1 + r$, $a_1 + 2r$ i zapisanie warunku $a_1 + r = 5$.

albo

- Wykorzystanie własności ciągu arytmetycznego oraz zapisanie: $b = \frac{a+c}{2}$
i $a + b + c = 15$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp 2 pkt

- Zapisanie układu równań $(a_1 + r - 1)^2 = a_1(a_1 + 2r)$ i $a_1 + r = 5$.

albo

- Zapisanie układu równań
$$\begin{cases} a + b + c = 15 \\ b = \frac{a + c}{2} \\ (b - 1)^2 = a \cdot c \end{cases}$$
.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania 4 pkt

Zapisanie i rozwiązanie równania z jedną niewiadomą:

- $a_1^2 - 10a_1 + 16 = 0$, $a_1 = 2$, $r = 3$ lub $a_1 = 8$, $r = -3$,

albo

- $c^2 - 10c + 16 = 0$, $c_1 = 2$ lub $c_2 = 8$.

Uwaga

Jeśli zdający obliczy tylko jedną wartość, to otrzymuje **3 punkty**.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) 5 pkt

Rozwiązanie pełne 6 pkt

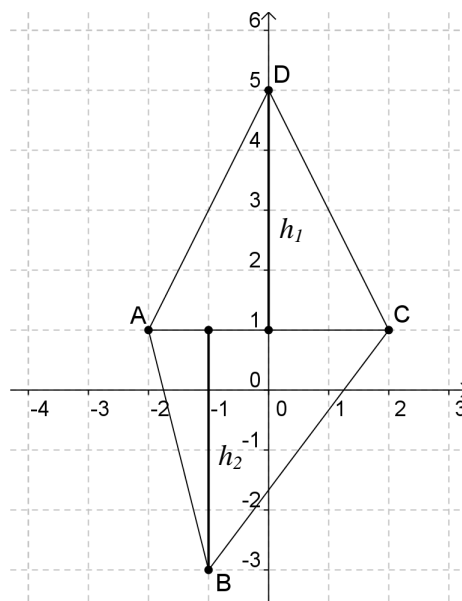
Obliczenie wszystkich wyrazów ciągu: 2, 5, 8 lub 8, 5, 2.

Zadanie 32. (4 pkt)

Oblicz pole czworokąta $ABCD$, którego wierzchołki mają współrzędne $A = (-2, 1)$, $B = (-1, -3)$, $C = (2, 1)$, $D = (0, 5)$.

I sposób rozwiązania

Zaznaczamy punkty $A = (-2, 1)$, $B = (-1, -3)$, $C = (2, 1)$, $D = (0, 5)$ w układzie współrzędnych i rysujemy czworokąt $ABCD$.



Przekątna AC dzieli czworokąt $ABCD$ na dwa trójkąty: ACD i ABC . Wysokość w trójkącie ACD jest równa $h_1 = 4$ i jest jednocześnie odległością punktu D od prostej AC o równaniu $y = 1$. Zatem pole trójkąta ACD jest równe $P_1 = \frac{1}{2}|AC| \cdot h_1$.

Ponieważ $|AC| = 4$ i $h_1 = 4$, to $P_1 = \frac{1}{2}|AC| \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

Wysokość w trójkącie ABC jest równa $h_2 = 4$ i jest jednocześnie odległością punktu B od prostej AC o równaniu $y = 1$. Zatem pole trójkąta ABC jest równe $P_2 = \frac{1}{2}|AC| \cdot h_2$.

Ponieważ $|AC| = 4$ i $h_2 = 4$, to $P_2 = \frac{1}{2}|AC| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8$.

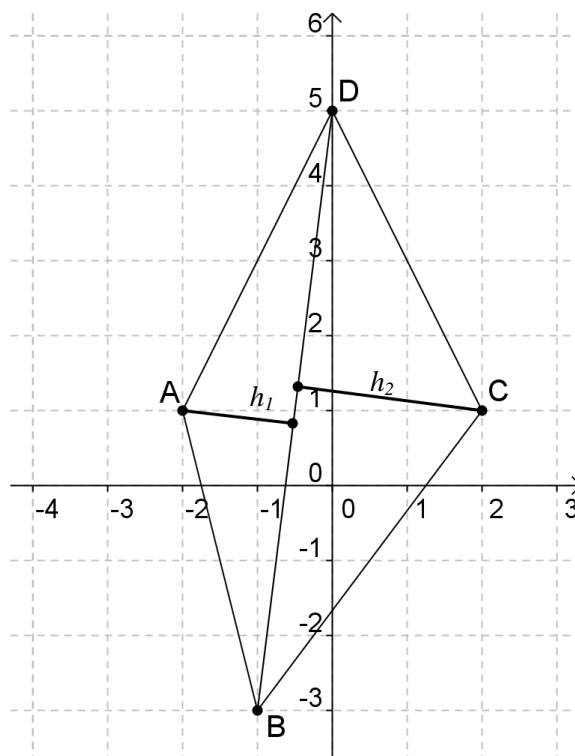
Pole czworokąta $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ACD i ABC .

Zatem $P_{ABCD} = P_1 + P_2 = 8 + 8 = 16$.

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe 16.

II sposób rozwiązania

Zaznaczamy punkty $A = (-2, 1)$, $B = (-1, -3)$, $C = (2, 1)$, $D = (0, 5)$ w układzie współrzędnych i rysujemy czworokąt $ABCD$.



Przekątna BD dzieli czworokąt $ABCD$ na dwa trójkąty: ABD i BDC . Wysokość h_1 w trójkącie ABD jest równa odległości punktu A od prostej BD , a wysokość h_2 w trójkącie BDC jest równa odległości punktu C od prostej BD . Zatem pole trójkąta ABD jest równe $P_1 = \frac{1}{2}|BD| \cdot h_1$, a pole trójkąta BDC jest równe $P_2 = \frac{1}{2}|BD| \cdot h_2$.

Wyznaczamy równanie prostej BD : $y + 3 = \frac{5+3}{0+1}(x+1)$
 $y + 3 = 8(x+1)$
 $y = 8x + 5$

Postać ogólna równania prostej BD : $8x - y + 5 = 0$.

Obliczamy długości wysokości h_1 i h_2 , korzystając ze wzoru na odległość punktu od prostej.

$$h_1 = \frac{|8 \cdot (-2) - 1 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{8^2 + 1^2}} = \frac{|-16 - 1 + 5|}{\sqrt{65}} = \frac{12}{\sqrt{65}}$$

$$h_2 = \frac{|8 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{8^2 + 1^2}} = \frac{|16 - 1 + 5|}{\sqrt{65}} = \frac{20}{\sqrt{65}}$$

Obliczamy długość odcinka BD : $|BD| = \sqrt{(0+1)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{1+64} = \sqrt{65}$

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe sumie pól trójkątów ABD i BDC .

Ponieważ $|BD| = \sqrt{65}$ i $h_1 = \frac{12}{\sqrt{65}}$, to $P_1 = \frac{1}{2}|BD| \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{65} \cdot \frac{12}{\sqrt{65}} = 6$.

Ponieważ $|BD| = \sqrt{65}$ i $h_2 = \frac{20}{\sqrt{65}}$, to $P_2 = \frac{1}{2}|BD| \cdot h_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{65} \cdot \frac{20}{\sqrt{65}} = 10$.

Zatem $P_{ABCD} = P_1 + P_2 = 6 + 10 = 16$.

Pole czworokąta $ABCD$ jest równe 16.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania1 pkt

Podział czworokąta na dwa trójkąty i wyznaczenie równania prostej AC : $y = 1$ lub prostej BD : $y = 8x + 5$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp2 pkt

Obliczenie odległości punktów B i D od prostej AC : 4

lub odległości punktów A i C od prostej BD : $\frac{12}{\sqrt{65}}$ i $\frac{20}{\sqrt{65}}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania3 pkt

Obliczenie pól trójkątów ACD i ABC : $P_1 = P_2 = 8$ lub pól trójkątów ABD i BDC : $P_1 = 6$ i $P_2 = 10$.

Rozwiązanie pełne4 pkt

Obliczenie pola powierzchni czworokąta $ABDC$: 16.