

Matematyka
Poziom rozszerzony

Grudzień 2007

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
1.	Wyznaczenie ilorazu ciągu (a_n) : $q = 2$ i wzoru ogólnego: $a_n = 6 \cdot 2^{n-1}$.	1
	Obliczenie drugiego i piątego wyrazu ciągu: $a_2 = 12, a_5 = 96$.	1
	Ułożenie równań wynikających z treści zadania: $\frac{12 + 1 + 3x + 2}{2} = \frac{96}{4} \vee \frac{12 + 1 + \frac{96}{4}}{2} = 3x + 2 \vee \frac{\frac{96}{4} + 3x + 2}{2} = 12 + 1$.	2
	Rozwiązanie równania: $x = 11 \vee x = 5,5 \vee x = 0$.	1
2.	Wykonanie rysunku z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń: α, β, γ – kąty odpowiednio przy wierzchołkach A, B, C , $ AC = 10$, $ BC = 10\sqrt{2}$, $R = 10$.	1
	Obliczenie sinusów kątów (np. z twierdzenia sinusów): $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin \beta = \frac{1}{2}$.	1
	Wyznaczenie kątów trójkąta: $\alpha = 45^\circ \vee \alpha = 135^\circ$, $\beta = 30^\circ \vee \beta = 150^\circ$.	1
	Wyznaczenie szukanego kąta trójkąta: $\gamma = 105^\circ$ lub $\gamma = 15^\circ$.	1
3.	Przekształcenie wzoru funkcji do postaci: $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)(x+2)}{(x+2)(x-1)}$.	1
	Zapisanie wzoru funkcji w postaci: $f(x) = x + 1 \wedge x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$.	1
	Narysowanie wykresu funkcji f : prosta o równaniu $y = x + 1$ bez punktów $(-2, -1), (1, 2)$.	1
	Wyznaczenie wzoru funkcji g : $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \in \langle -1, +\infty \rangle \setminus \{1\} \\ 2x + 2 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \setminus \{-2\} \end{cases}$.	1
	Narysowanie wykresu funkcji g .	1
	Podanie zbioru wartości funkcji g : $D^{-1} = (-\infty, 0) \setminus \{-2\}$.	1
4.	Obliczenie współczynnika b : $b = -16$.	1
	Obliczenie współczynnika c : $c = 24$.	1
	Przekształcenie wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$ do postaci umożliwiającej zastosowanie wzorów Viète'a: $(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$.	1
	Obliczenie wartości wyrażenia $x_1^2 + x_2^2$: $x_1^2 + x_2^2 = 40$.	1

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
5.	Zapisanie długości kolejnych boków czworokąta za pomocą wyrazów ciągu arytmetycznego: $a, a + r, a + 2r, a + 3r$.	1
	Wykorzystanie twierdzenia o czworokącie opisanym na okręgu do zapisania równania: $a + a + 2r = a + r + a + 3r$.	1
	Rozwiązanie równania i zapisanie wniosku: $r = 0$, więc boki mają równe długości, czyli czworokąt jest rombem.	1
6.	Przekształcenie równania do postaci: $x(a + 7) = a^2 - 49$.	1
	Zapisanie warunków, które muszą być spełnione, aby równanie miało nieskończenie wiele rozwiązań: $a + 7 = 0 \wedge a^2 - 49 = 0$.	1
	Rozwiązanie równania: $a^2 - 49 = 0: a = -7 \vee a = 7$.	1
	Rozwiązanie równania $a + 7 = 0$ i wyznaczenie wartości parametru a , dla którego równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań: $a = -7$.	1
7.	Wykonanie rysunku z oznaczeniami lub wprowadzenie dokładnie opisanych oznaczeń, np: $ABCD$ – dany trapez, $ AB = a, CD = b, K, L$ – środki przekątnych odpowiednio AC, BD, M, N – punkty przecięcia prostej KL odpowiednio z ramionami AD, BC .	1
	Wyznaczenie długości odcinka $KN: KN = \frac{a}{2}$.	1
	Wyznaczenie długości odcinka $LN: LN = \frac{b}{2}$.	1
	Wyznaczenie długości odcinka $KL: KL = \frac{a-b}{2}$.	1
8.	Obliczenie odległości d środka okręgu S od prostej $y = -\frac{3}{4}x + 2: d = 2$.	1
	Zapisanie warunku styczności prostej i okręgu i podanie długości promienia okręgu $r: d = r, r = 2$.	1
	Zapisanie równania okręgu: $(x - 10)^2 + (y + 3)^2 = 4$.	1
9.	Podanie dziedziny równania: $D = \langle \pi, 2\pi \rangle \setminus \left\{ \frac{3}{2}\pi \right\}$.	1
	Przekształcenie równania trygonometrycznego do postaci: $\operatorname{tg} x \cos x (2 \sin x + 1) = 0$.	1
	Zapisanie alternatywy równań: $\operatorname{tg} x = 0 \vee \cos x = 0 \vee 2 \sin x + 1 = 0$.	1
	Rozwiązanie w wyznaczonej dziedzinie równania $\operatorname{tg} x = 0: x \in \{ \pi, 2\pi \}$ i równania $\cos x = 0: x \in \emptyset$.	1
	Rozwiązanie w wyznaczonej dziedzinie równania $2 \sin x + 1 = 0: x \in \left\{ \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi \right\}$.	1
	Zapisanie zbioru rozwiązań równania $\operatorname{tg} x (2 \sin x \cos x + \cos x) = 0$: $x \in \left\{ \pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{11}{6}\pi, 2\pi \right\}$.	1

Numer zadania	Modelowe etapy rozwiązywania zadania	Liczba punktów
10.	Wyznaczenie mocy zbioru Ω : $\overline{\Omega} = \binom{2n+1}{2}$.	1
	Wyznaczenie liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A – wylosowanie liczby parzystej i nieparzystej: $\overline{A} = \binom{n+1}{1} \binom{n}{1}$.	1
	Obliczenie prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A : $P(A) = \frac{n+1}{2n+1}$.	1
	Zapisanie nierówności: $\frac{n+1}{2n+1} > \frac{7}{13}$.	1
	Rozwiązanie nierówności w N^+ : $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.	1
11.	Wykonanie rysunku z oznaczeniami i zaznaczenie na nim odpowiedniego kąta dwuściennego (podstawa ostrosłupa – $ABCD$, kąt dwuścienny – BED).	1
	Obliczenie długości krawędzi bocznej: $b = a\sqrt{5}$.	1
	Obliczenie długości h : $h = \frac{4a\sqrt{5}}{5}$.	1
	Wyznaczenie długości przekątnej podstawy: $ DB = 2a\sqrt{2}$.	1
	Zastosowanie twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBE : $\left(\frac{4a\sqrt{5}}{5}\right)^2 + \left(\frac{4a\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{4a\sqrt{5}}{5}\right)\left(\frac{4a\sqrt{5}}{5}\right)\cos\alpha = (2a\sqrt{2})^2$.	1
	Obliczenie szukanego cosinusa: $\cos\alpha = -\frac{1}{4}$.	1