Materiały diagnostyczne z matematyki
poziom podstawowy

czerwiec 2011

Klucz odpowiedzi do zadań zamkniętych
oraz
schemat oceniania

Materiały diagnostyczne przygotowała **Agata Siwik** we współpracy z nauczycielami matematyki szkół ponadgimnazjalnych:

Ewa Ziętek
Nauczyciel V Liceum Ogólnokształcącego im. Wspólnej Europy w Olsztynie
Nauczyciel Technikum nr 6 w Zespole Szkół Elektronicznych i Telekomunikacyjnych w Olsztynie

Irena Jakóbowska
Nauczyciel VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie
Wicedyrektor VI Liceum Ogólnokształcącego im. G. Narutowicza w Olsztynie

Elżbieta Guziejko
Nauczyciel Liceum Ogólnokształcącego im. Jana Kochanowskiego w Olecku

Ewa Olszewska
Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Handlowo-Ekonomicznych im. M. Kopernika w Białymstoku
Dyrektor Liceum Ogólnokształcącego Wschodnioeuropejskiego Instytutu Gospodarki w Białymstoku

Andrzej Gołota
Nauczyciel Technikum w Zespole Szkół Mechanicznych w Elblągu
Konsultant ds. matematyki Warmińsko-Mazurskiego Ośrodka Doskonalenia Nauczycieli w Elblągu

Jan Żukowski
Nauczyciel I Liceum Ogólnokształcące im. M. Konopnickiej w Suwałkach
Doradca metodyczny Centrum Doskonalenia Nauczycieli i Kształcenia Ustawicznego w Suwałkach

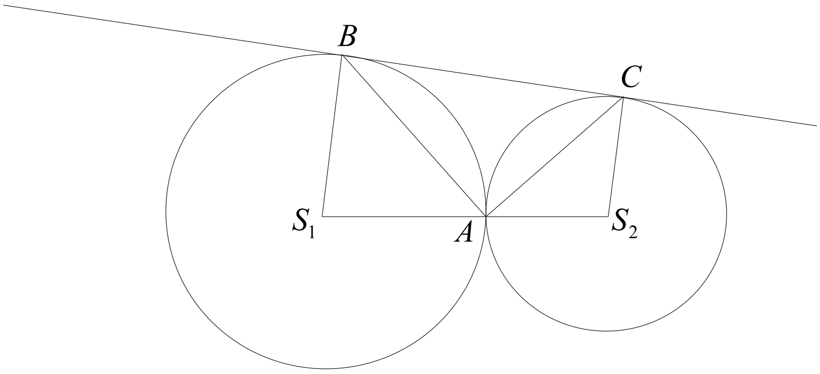
Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
odpowiedź	**A**	**A**	**D**	**C**	**B**	**B**	**B**	**C**	**C**	**C**	**A**	**B**	**B**

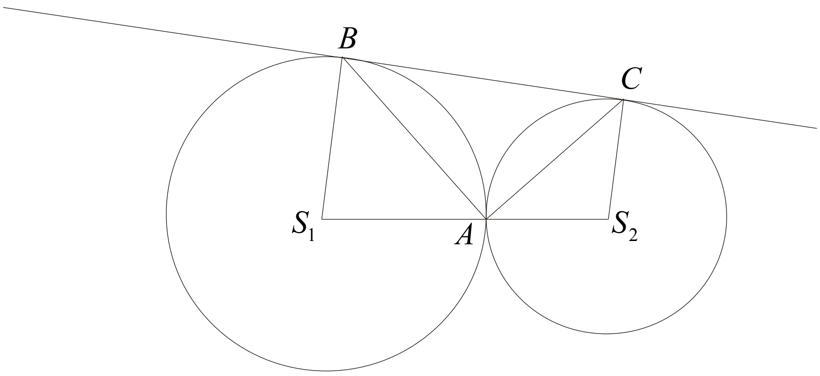
Schemat punktowania zadań otwartych

Zadanie 14. (*2 pkt*)

Dwa okręgi o środkach S_1 i S_2 są styczne zewnętrznie w punkcie A. Poprowadzono prostą styczną do obu okręgów odpowiednio w punktach B i C (patrz rysunek). Wykaż, że kąt BAC jest prosty.



I sposób rozwiązania



Odcinki S_1B i S_2C są równoległe, bo styczna do obu okręgów jest prostopadła do promieni poprowadzonych do punktów styczności, stąd $|\sphericalangle BS_1A| + |\sphericalangle AS_2C| = 180°$.

Miara kąta środkowego w okręgu jest dwukrotnie większa od miary kąta dopisanego opartego na tym samym łuku, więc $|\sphericalangle CBA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BS_1A|$ oraz $|\sphericalangle BCA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CS_2A|$ stąd wynika, że $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle BCA| = 90°$.

Suma miar kątów wewnętrznych trójkąta jest równa $180°$, zatem $|\sphericalangle BAC| = 90°$.

Schemat oceniania I sposób rozwiązania

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………1 punkt

gdy:

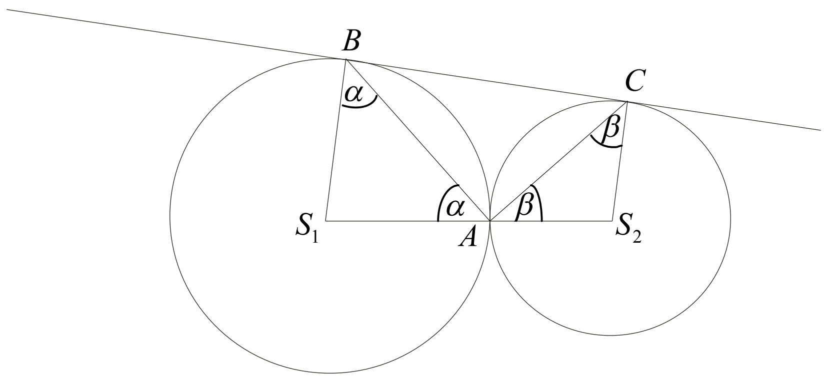
- zauważy, że odcinki S_1B i S_2C są równoległe oraz wykorzysta twierdzenie, że miara kąta środkowego w okręgu jest dwukrotnie większa od miary kąta dopisanego opartego na tym samym łuku. Wystarczy, że zapisze np.: $|\sphericalangle BS_1A| + |\sphericalangle AS_2C| = 180°$ i $|\sphericalangle CBA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle BS_1A|$ oraz $|\sphericalangle BCA| = \frac{1}{2}|\sphericalangle CS_2A|$.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………......2 punkty

gdy:

- przeprowadzi pełne rozumowanie np.: zapisze że, $|\sphericalangle CBA| + |\sphericalangle BCA| = 90°$, więc $|\sphericalangle BAC| = 90°$.

II sposób rozwiązania



Trójkąty BS_1A i CS_2A są równoramienne. Zatem $|\sphericalangle S_1BA| = |\sphericalangle S_1AB| = \alpha$ oraz $|\sphericalangle CAS_2| = |\sphericalangle ACS_2| = \beta$.

Odcinki S_1B i S_2C są prostopadłe do stycznej, stąd $|\sphericalangle ABC| = 90° - \alpha$, $|\sphericalangle BCA| = 90° - \beta$.

Niech $|\sphericalangle BAC| = \gamma$.

Kąty ABC, BCA i BAC są kątami wewnętrznymi trójkąta BAC,
więc $90° - \alpha + 90° - \beta + \gamma = 180°$, stąd $\alpha + \beta = \gamma$.

Kąt S_1AS_2 jest półpełny, więc $|\sphericalangle S_1AS_2| = 180° = \alpha + \gamma + \beta$, stąd $2\gamma = 180°$ czyli $\gamma = |\sphericalangle BAC| = 90°$.

<u>Schemat oceniania II sposób rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………1 punkt

gdy:

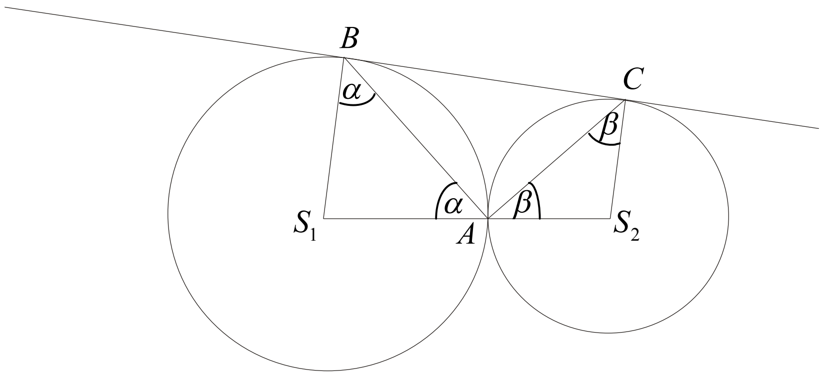
- zauważy, że odcinki S_1B i S_2C są prostopadłe do stycznej, trójkąty BS_1A i CS_2A są równoramienne i zapisze zależność $90° - \alpha + 90° - \beta + \gamma = 180°$.

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………......2 punkty

gdy:

- zapisze, że $\left|\sphericalangle S_1AS_2\right| = 180° = \alpha + \gamma + \beta$ i obliczy miarę kąta BAC: $\left|\sphericalangle BAC\right| = 90°$.

<u>III sposób rozwiązania</u>



Trójkąty S_1AB i AS_2C są równoramienne. Zatem $\left|\sphericalangle S_1AB\right| = \left|\sphericalangle S_1BA\right| = \alpha$ oraz $\left|\sphericalangle S_2AC\right| = \left|\sphericalangle ACS_2\right| = \beta$.

Kąty S_1AB, S_1BA, BS_1A są kątami wewnętrznymi trójkąta S_1AB, więc $\left|\sphericalangle BS_1A\right| = 180° - 2\alpha$.

Czworokąt S_1S_2CB jest trapezem więc $\left|\sphericalangle AS_2C\right| = 2\alpha$.

Suma miar kątów trójkąta AS_2C jest równa:

$\left|\sphericalangle AS_2C\right| + \left|\sphericalangle S_2AC\right| + \left|\sphericalangle ACS_2\right| = 2\alpha + \beta + \beta = 180°$, stąd $2\alpha + 2\beta = 180°$, więc $\alpha + \beta = 90°$.

Kąt S_1AS_2 jest półpełny więc $\left|\sphericalangle BAC\right| + \alpha + \beta = 180°$, zatem $\left|\sphericalangle BAC\right| = 90°$.

<u>Schemat oceniania III sposób rozwiązania</u>

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………………1 punkt

gdy:

- zauważy, że trójkąty S_1AB i AS_2C są równoramienne, zapisze $|\sphericalangle S_1AB| = |\sphericalangle S_1BA|$ i $|\sphericalangle S_2AC| = |\sphericalangle ACS_2|$ i $|\sphericalangle BS_1A| = 180° - 2\alpha$ oraz zauważy, że czworokąt S_1S_2CB jest trapezem więc $|\sphericalangle AS_2C| = 2\alpha$.

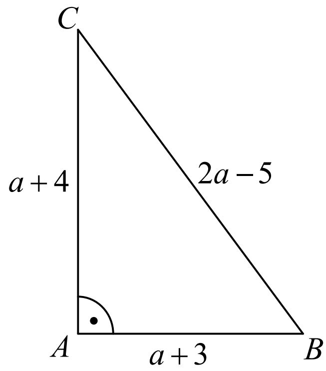
Zdający otrzymuje ………………………………………………………………......2 punkty

gdy:

- zapisze, że suma kątów trójkąta AS_2C jest równa: $2\alpha + 2\beta = 180°$, więc $\alpha + \beta = 90°$ i kąt S_1AS_2 jest półpełny więc , zatem $|\sphericalangle BAC| = 90°$.

Zadanie 15. (*2 pkt*)
Trójkąt ABC jest prostokątny. W trójkącie tym miara kąta BAC jest równa $90°$, $|AB| = a+3, |AC| = a+4, |BC| = 2a-5$. Oblicz długości boków tego trójkąta.

__Rozwiązanie__



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie

$$(a+3)^2 + (a+4)^2 = (2a-5)^2 \text{ i } a > 2{,}5$$

Po przekształceniach otrzymujemy równanie

$$2a^2 - 34a = 0 .$$

Wtedy $a_1 = 0$ (sprzeczne z założeniem) oraz $a_2 = 17$.

Obliczamy długości boków tego trójkąta: $|AB| = 20$, $|AC| = 21$, $|BC| = 29$.

__Schemat oceniania__

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………1 punkt

gdy:

- rozwiąże równanie $(a+3)^2 + (a+4)^2 = (2a-5)^2$: $a = 17$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ……………………………………………………………......2 punkty

gdy:

- obliczy długości boków $|AB| = 20$, $|AC| = 21$, $|BC| = 29$.

__Uwagi__

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy rozwiązywaniu równania kwadratowego i konsekwentnie do popełnionego błędu obliczy długości boków tego trójkąta, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający błędnie zapisze równanie kwadratowe, to za całe zadanie otrzymuje **0 punktów**.

Zadanie 16. (*2 pkt*)

Zbadaj, czy istnieje taki kąt ostry α, dla którego $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$. Odpowiedź uzasadnij.

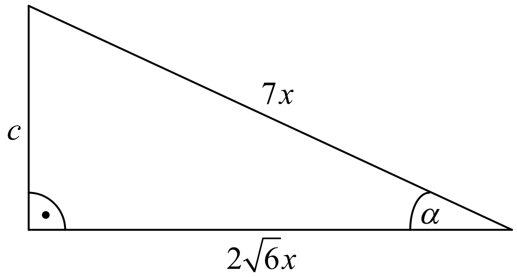
I sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia np.:

$2\sqrt{6}x$ - długość przyprostokątnej leżącej przy kącie α

$7x$ - długość przeciwprostokątnej

c - długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie: $\left(2\sqrt{6}x\right)^2 + c^2 = (7x)^2$.

Wtedy $c = 5x$.

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{5x}{2\sqrt{6}x} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$.

Z treści zadania wynika, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Otrzymujemy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt α.

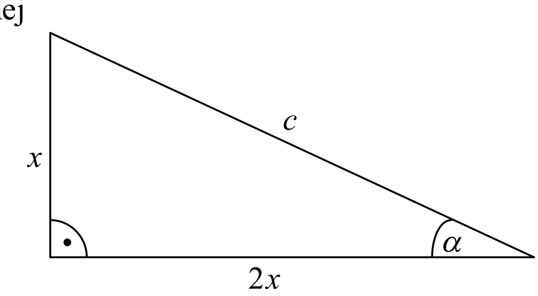
II sposób rozwiązania

Rysujemy trójkąt prostokątny i wprowadzamy oznaczenia np.:

x - długość przyprostokątnej leżącej naprzeciw kąta α

$2x$ - długość przyprostokątnej leżącej przy kącie α

c - długość przeciwprostokątnej



Z twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy równanie: $(2x)^2 + x^2 = c^2$. Wtedy $c = \sqrt{5}x$.
Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym otrzymujemy:

$$\cos x = \frac{2x}{\sqrt{5}x} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Z treści zadania wynika, że $\cos x = \frac{2\sqrt{6}}{7}$.
Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt α.

Schemat oceniania I i II sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 punkt

gdy:

- zaznaczy kąt α w trójkącie prostokątnym i wyznaczy długości jego boków w zależności od współczynnika proporcjonalności np.: $5x, 2\sqrt{6}x, 7x$ lub $x, 2x, \sqrt{5}x$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Uwaga

Zdający może przyjąć współczynnik proporcjonalności równy 1.

Zdający otrzymuje ....2 punkty

gdy:

- obliczy $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$, porówna z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

albo

- obliczy $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, porówna z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

III sposób rozwiązania

Korzystamy z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, otrzymujemy: $\sin^2\alpha+\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2=1$, a stąd $\sin\alpha=\frac{5}{7}$. (α kąt ostry ($\sin\alpha>0$)).

Korzystamy ze związku między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, otrzymujemy $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{5}{7}}{\frac{2\sqrt{6}}{7}}=\frac{5}{2\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{12}$.

Z treści zadania wynika, że $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$.

Otrzymujemy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt α.

IV sposób rozwiązania

Korzystamy ze związku między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, otrzymujemy $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{7}$.

Korzystamy z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, otrzymujemy: $\left(\frac{\sqrt{6}}{7}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{6}}{7}\right)^2=\frac{30}{49}\neq 1$.

Otrzymujemy sprzeczność, zatem nie istnieje taki kąt α.

Schemat oceniania III i IV sposobu rozwiązania

Zdający otrzymuje ....1 punkt

gdy:

- obliczy wartość $\sin\alpha=\frac{5}{7}$ korzystając ze związku $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

albo

- obliczy wartość $\sin\alpha=\frac{\sqrt{6}}{7}$ korzystając ze związku $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i na tym poprzestanie lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………......2 punkty

gdy:

- obliczy $\mathrm{tg}\alpha = \frac{5}{2\sqrt{6}}$ (gdy $\sin\alpha = \frac{5}{7}$), porówna z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

albo

- podstawi wartość $\sin\alpha = \frac{\sqrt{6}}{7}$ do związku $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

<u>**V sposób rozwiązania**</u>

Dla $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$ odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta: $\alpha \approx 46°$ (akceptujemy $\alpha \approx 45°$).
Dla $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$ odczytujemy z tablic trygonometrycznych przybliżoną miarę kąta: $\alpha \approx 27°$ (akceptujemy $\alpha \approx 26°$).
Otrzymane wyniki (różne miary kąta α w tym samym trójkącie) pozwalają stwierdzić, że taki kąt nie istnieje.

<u>**Schemat oceniania V sposobu rozwiązania**</u>

Zdający otrzymuje …………………………………………………………………1 punkt

gdy:

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta dla $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$: $\alpha \approx 46°$ (akceptujemy $\alpha \approx 45°$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy

albo

- odczyta z tablic przybliżoną wartość kąta dla $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$: $\alpha \approx 27°$ (akceptujemy $\alpha \approx 26°$) i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ………………………………………………………………......2 punkty

gdy:

- dla wyznaczonej wartości kąta α (gdy $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{7}$) odczyta z tablic wartość $\mathrm{tg}\alpha$, porówna ją z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

albo

- dla wyznaczonej wartości kąta α (gdy $\mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{2}$) odczyta z tablic wartość $\cos\alpha$, porówna ją z wartością podaną w treści zadania i stwierdzi, że taki kąt nie istnieje.

<u>**Uwagi**</u>

1. Wszystkie rozwiązania, w których zdający błędnie zaznaczy kąt α w przedstawionym przez siebie rysunku i z tego korzysta oceniamy na **0 punktów**.
2. Jeśli zdający narysuje dwa trójkąty prostokątne, oznaczy długości boków odpowiednio: $5, 2\sqrt{6}, 7$ i $1, 2, \sqrt{5}$ (lub na jednym z nich zaznaczy długości boków obu trójkątów) bez współczynnika proporcjonalności i stwierdzi, że boki mają różną długość, zatem nie istnieje taki kąt, to otrzymuje **0 punktów.** W takim przypadku wymagamy udowodnienia, że boki takich trójkątów nie są proporcjonalne.
3. Jeśli zdający nie odrzuci odpowiedzi ujemnej, to otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 17. (*2 pkt*)
Ciąg geometryczny (a_n) określony jest wzorem $a_n = -2 \cdot 3^{n+1}$. Oblicz iloraz tego ciągu oraz sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu.

Rozwiązanie

Obliczamy iloraz ciągu (a_n): $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{-2 \cdot 3^{n+2}}{-2 \cdot 3^{n+1}} = 3$

Obliczamy pierwszy wyraz ciągu (a_n): $a_1 = -2 \cdot 3^2 = -18$.

Obliczamy sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu wykorzystując wzór na sumę n początkowych wyrazów ciągu geometrycznego $S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$:

$$S_4 = -18 \cdot \frac{3^4 - 1}{3-1} = -18 \cdot 40 = -720.$$

Uwaga
Zdający może obliczyć sumę ciągu geometrycznego wykorzystując wzór: $S_4 = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + a_1 \cdot q^3 = -18 \cdot \left(1 + 3 + 3^2 + 3^3\right) = -720$ lub

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, gdzie $a_1 = -2 \cdot 3^2 = -18$, $a_2 = -2 \cdot 3^3 = -54$, $a_3 = -2 \cdot 3^4 = -162$, $a_4 = -2 \cdot 3^5 = -486$.

Schemat oceniania

Zdający otrzymuje ....1 punkt

gdy:

- obliczy $a_1 = -18$ i obliczy iloraz ciągu (a_n): $q = 3$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

albo

- obliczy $a_1 = -18$, $a_2 = -54$, $a_3 = -162$, $a_4 = -486$ i na tym zakończy lub dalej popełnia błędy.

Zdający otrzymuje ....2 punkty

gdy:

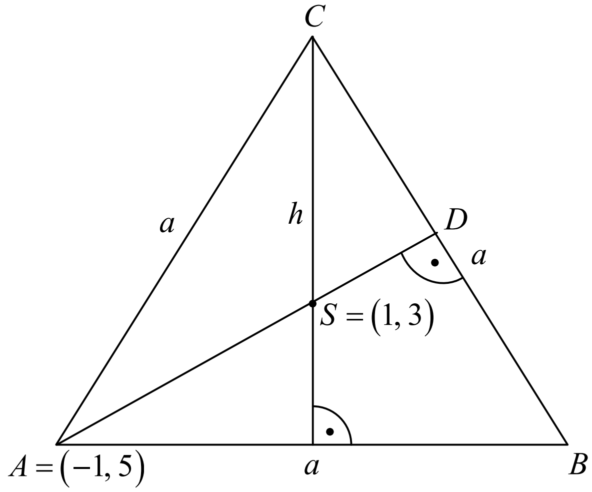
- iloraz tego ciągu oraz sumę czterech początkowych wyrazów tego ciągu.

Uwagi

1. Jeżeli zdający popełni błąd rachunkowy przy obliczaniu pierwszego wyrazu lub ilorazu tego ciągu i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.
2. Jeżeli zdający popełni jeden błąd rachunkowy przy obliczaniu czterech pierwszych wyrazów tego ciągu i konsekwentnie rozwiąże zadanie do końca, to za całe rozwiązanie otrzymuje **1 punkt**.

Zadanie 18. (*4 pkt*)
Dany jest trójkąt równoboczny *ABC*, w którym wysokości przecinają się w punkcie o współrzędnych $S=(1,3)$. Jeden z wierzchołków tego trójkąta ma współrzędne $A=(-1,5)$. Oblicz pole i obwód tego trójkąta.

<u>I sposób rozwiązania</u>
Rysujemy trójkąt równoboczny *ABC* i wprowadzamy oznaczenia np.:



Korzystamy z własności trójkąta równobocznego i zapisujemy : $|AS|=\frac{2}{3}|AD|$,

$|AD|=h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Obliczamy $|AS|=\sqrt{(1+1)^2+(3-5)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, zatem $\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{2}$ stąd $a=2\sqrt{6}$.

Obliczamy pole trójkąta: $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(2\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$.

Obliczamy obwód trójkąta: $O=3a=3\cdot 2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$.

<u>Schemat oceniania I sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania... 1 punkt

- obliczenie długości odcinka $|AS|=2\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp..2 punkty

- zauważenie, że $|AS|=\frac{2}{3}h$ i zapisanie równości $\frac{a\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{2}$.

albo

- obliczenie wysokości $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{2}$.

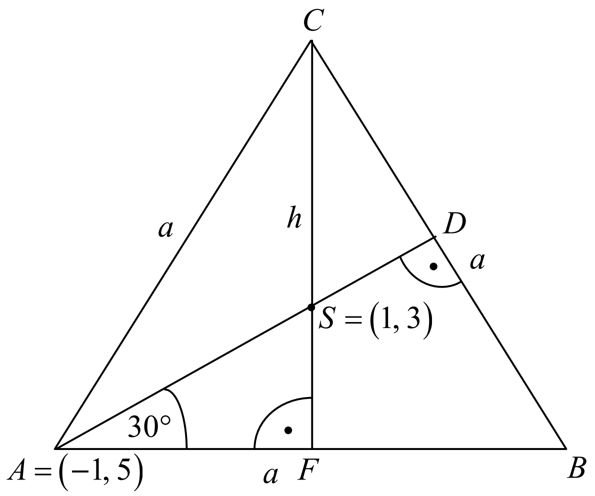
Pokonanie zasadniczych trudności zadania ……………………..……………...3 punkty

- obliczenie długości boku trójkąta równobocznego: $a = 2\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne ……………………………..…………………………………..4 punkty

Obliczenie pola i obwodu trójkąta równobocznego: $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$, $O = 6\sqrt{6}$.

<u>II sposób rozwiązania</u>



Obliczamy długość odcinka $|AS| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$.

Z trójkąta *AFS* obliczamy długość boku *AF*: $\cos 30° = \dfrac{|AF|}{|AS|}$, stąd $|AF| = 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$.

Obliczamy długość boku trójkąta: $a = 2 \cdot |AF| = 2\sqrt{6}$.

Obliczamy pole trójkąta: $P = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{(2\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$

Obliczamy obwód trójkąta: $O = 3a = 3 \cdot 2\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$.

<u>Schemat oceniania II sposobu rozwiązania</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania……………………………………………………..1punkt

- obliczenie długości odcinka $|AS| = 2\sqrt{2}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp……………………………………….2punkty

- zauważenie, że trójkąt $|\sphericalangle SAF| = 30°$ i zapisanie $\cos 30° = \dfrac{|AF|}{|AS|}$.

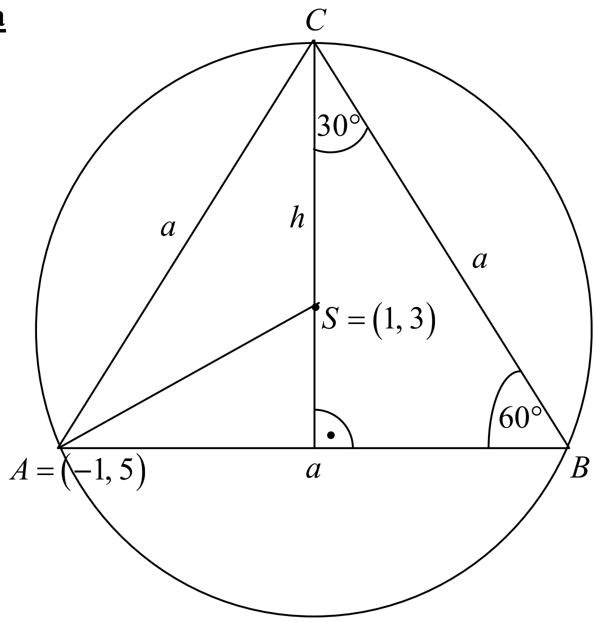
Pokonanie zasadniczych trudności zadania………………………………………...3punkty

- obliczenie długości boku trójkąta równobocznego: $a = 2|AF| = 2\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne……………………………………………………………4 punkty

Obliczenie pola i obwodu trójkąta równobocznego: $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$, $O=6\sqrt{6}$.

<u>**III sposób rozwiązania**</u>



Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie równobocznym. Punkt A należy do tego okręgu.

Korzystamy z równania okręgu i otrzymujemy: $(-1-1)^2+(5-3)^2=r^2$, stąd $r^2=8$, zatem $r=2\sqrt{2}$.

Obliczamy długość boku trójkąta: $r=|AS|=\frac{2}{3}h=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$, zatem $a=2\sqrt{6}$.

Obliczamy pole trójkąta: $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{(2\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$.

Obliczamy obwód trójkąta: $O=3a=3\cdot 2\sqrt{6}=6\sqrt{6}$.

<u>**Uwaga**</u>

Zdający może obliczyć wysokość trójkąta równobocznego $h=3\sqrt{2}$, następnie obliczyć długość boku trójkąta z twierdzenia Pitagorasa lub z własności trójkąta prostokątnego o kątach ostrych 30° i 60°.

<u>**Schemat oceniania III sposobu rozwiązania**</u>

Rozwiązanie, w którym postęp jest wprawdzie niewielki, ale konieczny na drodze do całkowitego rozwiązania zadania……………………………………………………..1punkt

- obliczenie długości promienia okręgu opisanego na trójkącie równobocznym: $r=2\sqrt{2}$.

<u>**Uwaga**</u>

Zdający może przedstawić wynik w postaci $r=\sqrt{8}$.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp……………………………………………2punkty

- Zauważenie, że $r=\frac{2}{3}h$ i zapisanie równości $\frac{a\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{2}$.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania…………………………………………...3punkty

- Obliczenie długości boku trójkąta równobocznego: $a=2\sqrt{6}$.

Rozwiązanie pełne…………………………………………………………………4 punkty

Obliczenie pola i obwodu trójkąta równobocznego: $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$, $O=6\sqrt{6}$.

<u>**Uwagi**</u>

1. Jeśli zdający popełni błąd rachunkowy i konsekwentnie do popełnionego błędu rozwiąże zadanie, to przyznajemy **3 punkty.**
2. Jeśli zdający przyjmie, że S jest środkiem wysokości trójkąta równobocznego $\left(|AS|=\frac{1}{2}h\right)$, to za całe rozwiązanie przyznajemy **1 punkt** (za obliczenie $|AS|$).

Zadanie 19. (*5 pkt*)
Dwie prostokątne działki rekreacyjne mają taką samą powierzchnię równą $310\,\mathrm{m}^2$. Długość drugiej działki jest o 4,8 m krótsza od długości pierwszej, a szerokość o 3 m dłuższa od szerokości pierwszej. Podaj wymiary działki o mniejszym obwodzie.

Rozwiązanie
Przyjmujemy oznaczenia np.: x, y - wymiary I działki: x - długość, y – szerokość
Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 310 \\ (x-4,8)\cdot(y+3) = 310 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny: $x \cdot y + 3x - 4,8y - 14,4 = 310$, podstawiamy do tego równania $x \cdot y = 310$ i wyznaczamy z tego równania niewiadomą x: $x = 1,6y + 4,8$.

Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania $(1,6y+4,8)\cdot y = 310$ i doprowadzamy to równanie do postaci: $1,6y^2 + 4,8y - 310 = 0$, które ma dwa rozwiązania $y_1 = -15,5$ (nie spełnia warunków zadania) i $y_2 = 12,5$.

Zatem, jeżeli $y = 12,5$, to $x = 24,8$ i wtedy działka I ma wymiary: $24,8\,\mathrm{m}\,\mathrm{x}\ 12,5\,\mathrm{m}$, zaś działka II: $20\,\mathrm{m}\,\mathrm{x}\ 15,5\,\mathrm{m}$.

Obliczamy obwód I działki: $2\cdot 24,8 + 2\cdot 12,5 = 74,6\,\mathrm{m}$.

Obliczamy obwód II działki: $2\cdot 20 + 2\cdot 15,5 = 71\,\mathrm{m}$.

Zapisujemy odpowiedź: Działka o mniejszym obwodzie ma wymiary: $20\,\mathrm{m}\,\mathrm{x}\ 15,5\,\mathrm{m}$.

albo

Przyjmujemy oznaczenia np.: x, y - wymiary II działki: x - długość, y – szerokość
Zapisujemy układ równań:

$$\begin{cases} x \cdot y = 310 \\ (x+4,8)\cdot(y-3) = 310 \end{cases}$$

Przekształcamy drugie równanie w sposób równoważny: $x \cdot y - 3x + 4,8y - 14,4 = 310$, podstawiamy do tego równania $x \cdot y = 310$ i wyznaczamy z tego równania niewiadomą x: $x = 1,6y - 4,8$.

Wyznaczoną wartość x podstawiamy do pierwszego równania $(1,6y-4,8)\cdot y = 310$ i doprowadzamy to równanie do postaci: $1,6y^2 - 4,8y - 310 = 0$, które ma dwa rozwiązania $y_1 = 15,5$ i $y_2 = -12,5$ (nie spełnia warunków zadania).

Zatem, jeżeli $y = 15,5$, to $x = 20$ i wtedy działka II ma wymiary: $20\,\mathrm{m}\,\mathrm{x}\ 15,5\,\mathrm{m}$, zaś działka II: $24,8\,\mathrm{m}\,\mathrm{x}\ 12,5\,\mathrm{m}$.

Obliczamy obwód II działki: $2\cdot 20 + 2\cdot 15,5 = 71\,\mathrm{m}$.

Obliczamy obwód I działki: $2\cdot 24,8 + 2\cdot 12,5 = 74,6\,\mathrm{m}$.

Zapisujemy odpowiedź: Działka o mniejszym obwodzie ma wymiary: $20\,\mathrm{m}\,\mathrm{x}\ 15,5\,\mathrm{m}$.

Schemat oceniania

Rozwiązanie, w którym postęp jest niewielki, ale konieczny na drodze do pełnego rozwiązania zadania .... 1 pkt

- wprowadzenie oznaczeń, np.: x, y - wymiary I działki i zapisanie równania $(x-4,8)\cdot(y+3)=310$.

albo

- wprowadzenie oznaczeń, np.: x, y - wymiary II działki i zapisanie równania $(x+4,8)\cdot(y-3)=310$.

Uwaga

Nie wymagamy opisania oznaczeń literowych, jeżeli z rozwiązania można wywnioskować, że zdający poprawnie je stosuje.

Rozwiązanie, w którym jest istotny postęp .... 2 pkt

Zapisanie układu równań z niewiadomymi x i y, np.:

$$\begin{cases} x\cdot y=310 \\ (x-4,8)\cdot(y+3)=310 \end{cases}, \text{ gdzie } x, y \text{ - wymiary I działki}$$

albo

$$\begin{cases} x\cdot y=310 \\ (x+4,8)\cdot(y-3)=310 \end{cases}, \text{ gdzie } x, y \text{ - wymiary II działki}$$

Uwaga

Zdający nie musi zapisywać układu równań, może od razu zapisać równanie z jedną niewiadomą.

Pokonanie zasadniczych trudności zadania .... 3 pkt

Zapisanie równania z jedną niewiadomą x lub y, np:

$1,6y^2+4,8y-310=0$, gdzie y – szerokość I działki

albo

$x^2-4,8x-496=0$, gdzie x, - długość I działki

albo

$1,6y^2-4,8y-310=0$, gdzie y - szerokość II działki

albo

$x^2+4,8x-496=0$, gdzie x, - długość II działki

Rozwiązanie prawie całkowite .... 4 pkt

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą y: $y=12,5$ i obliczenie długości I działki: $x=24,8$.

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą x: $x=24,8$ i obliczenie szerokości I działki: $y=12,5$.

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą y: $y=15,5$ i obliczenie długości II działki: $x=20$.

albo

- rozwiązanie równania kwadratowego z niewiadomą x: $x=20$ i obliczenie szerokości II działki: $y=15,5$.

Rozwiązanie zadania do końca lecz z usterkami, które jednak nie przekreślają poprawności rozwiązania (np. błędy rachunkowe) .... 4 pkt

Rozwiązanie równania z niewiadomą x lub y z błędem rachunkowym i konsekwentne rozwiązanie zadania do końca.

Rozwiązanie pełne .... 5 pkt

Podanie wymiarów działki o mniejszym obwodzie: $20\text{ m x }15,5\text{ m}$.

Uwagi

1. Jeżeli zdający **podaje** (bez obliczeń) odpowiedź: wymiary działki o mniejszym obwodzie, to: $20\text{ m x }15,5\text{ m}$, otrzymuje **0 punktów**.
2. Jeżeli zdający od razu zapisze i uzasadni, że obwód drugiej działki jest mniejszy i na tym poprzestanie, otrzymuje **1 punkt.** np.:
   $O_1=2\cdot(x+y)$ i $O_2=2\cdot(x+3+y-4,8)=2\cdot(x+y-1,8)$, zatem $O_1>O_2$.