

Miejsce  
na naklejkę  
z kodem szkoły

dysleksja

MMA-R1A1P-052

# EGZAMIN MATURALNY Z MATEMATYKI

Arkusz II

POZIOM ROZSZERZONY

Czas pracy 150 minut

ARKUSZ II

MAJ  
ROK 2005

## Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 15 stron. Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Rozwiązania zadań i odpowiedzi zamieść w miejscu na to przeznaczonym.
3. W rozwiązaniach zadań przedstaw tok rozumowania prowadzący do ostatecznego wyniku.
4. Pisz czytelnie. Używaj długopisu/pióra tylko z czarnym tuszem/atramentem.
5. Nie używaj korektora. Błędne zapisy przekreśl.
6. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie podlegają ocenie.
7. Obok każdego zadania podana jest maksymalna liczba punktów, którą możesz uzyskać za jego poprawne rozwiązanie.
8. Możesz korzystać z zestawu wzorów matematycznych, cyrkla i linijki oraz kalkulatora.
9. Wypełnij tę część karty odpowiedzi, którą koduje zdający. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Na karcie odpowiedzi wpisz swoją datę urodzenia i PESEL. Zamaluj ■ pola odpowiadające cyfrom numeru PESEL. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem ⊙ i zaznacz właściwe.

Za rozwiązanie  
wszystkich zadań  
można otrzymać  
łącznie  
**50 punktów**

*Życzymy powodzenia!*

Wypełnia zdający przed  
rozpoczęciem pracy

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

PESEL ZDAJĄCEGO

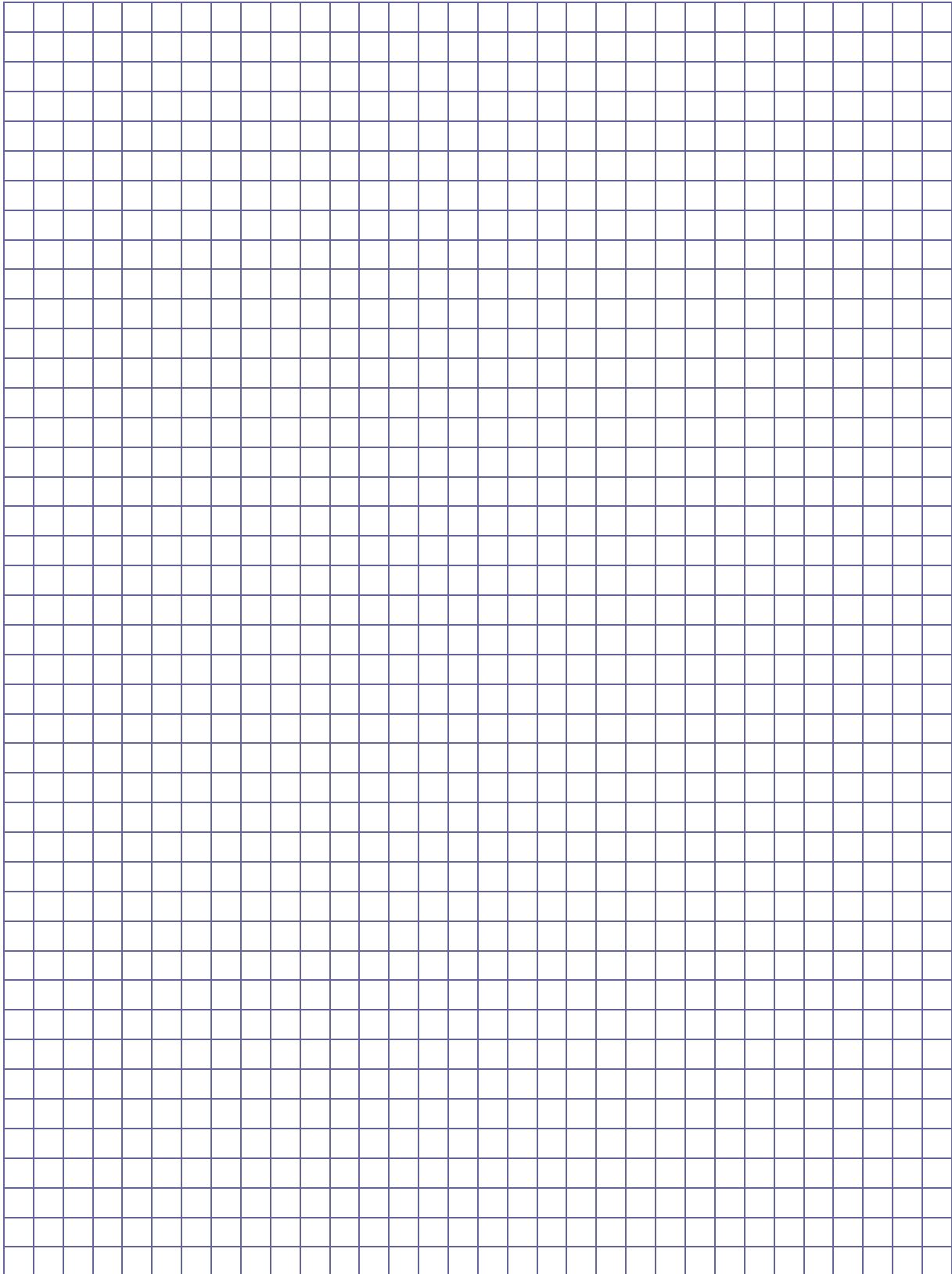
tylko  
OKE Kraków,  
OKE Wrocław

--	--	--

KOD  
ZDAJĄCEGO

**Zadanie 11. (3 pkt)**

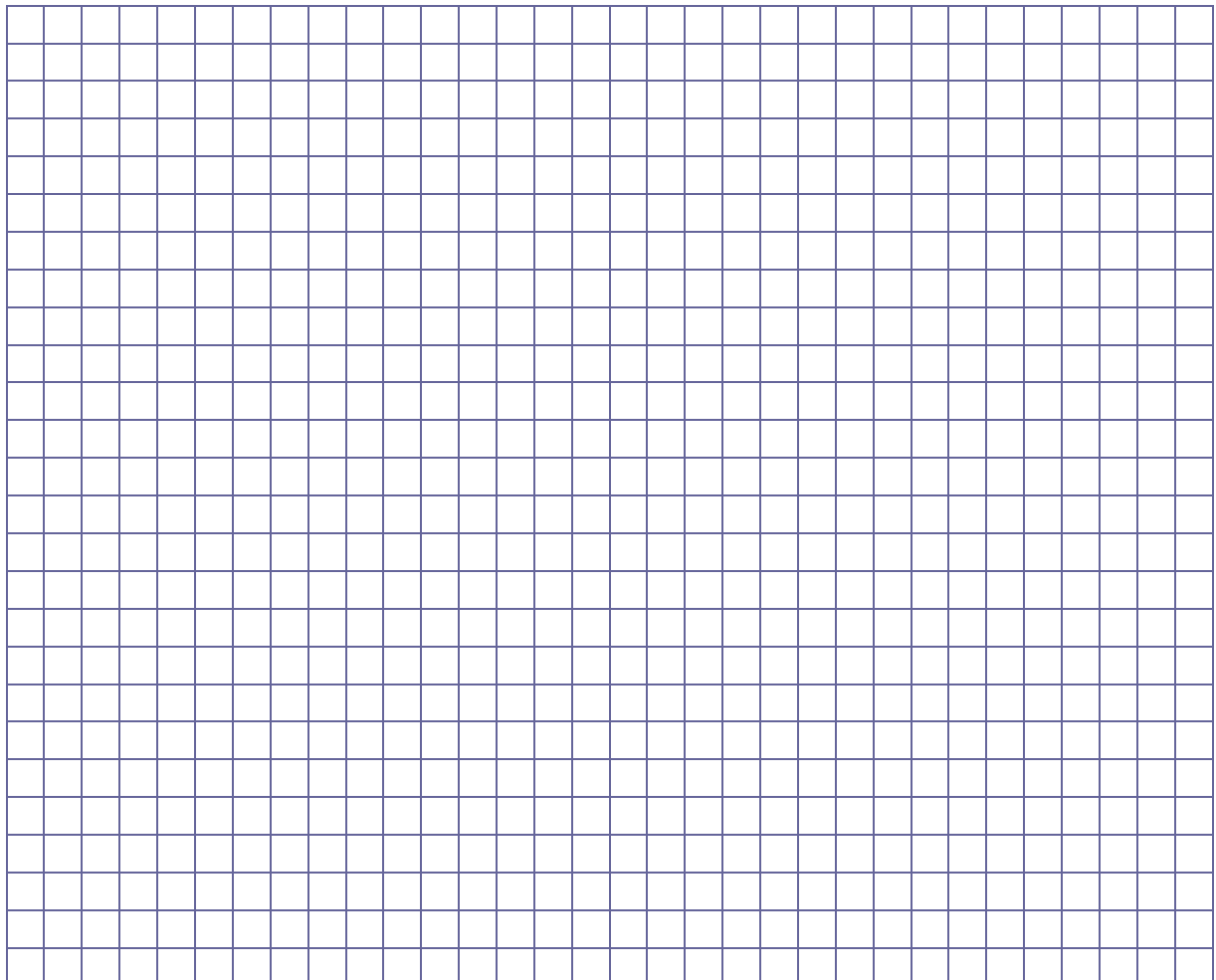
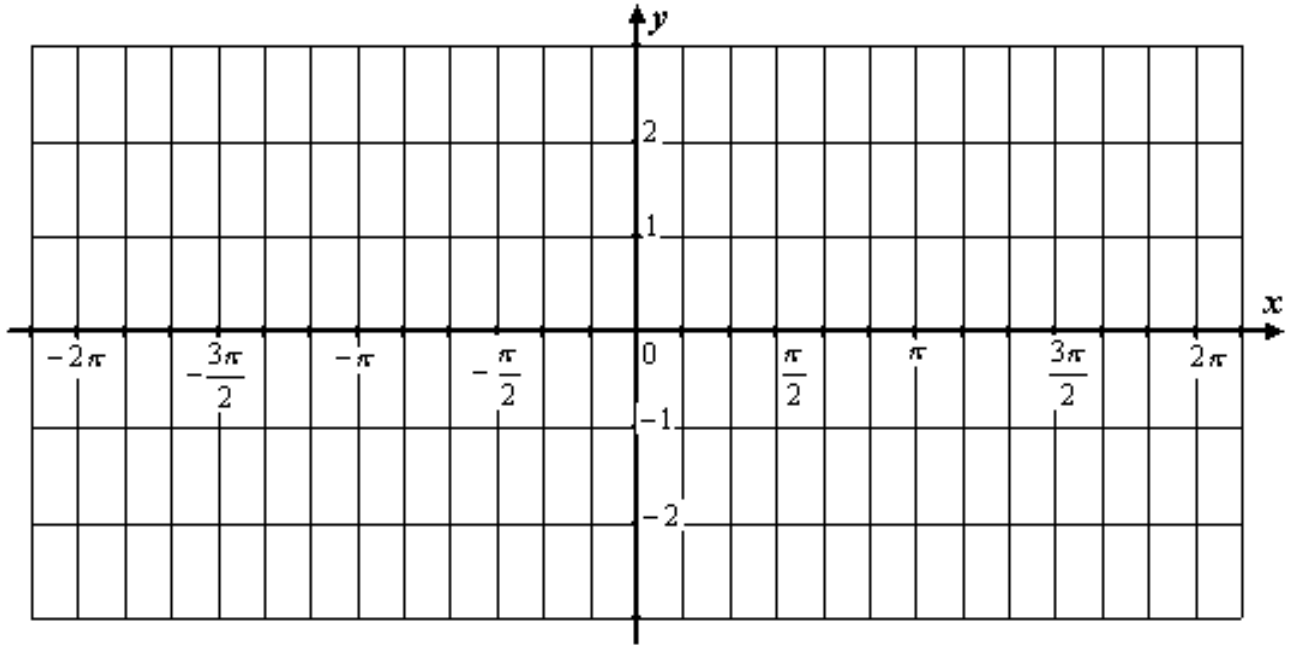
Wyznacz dziedzinę funkcji  $f(x) = \log_{x^2-3}(x^3 + 4x^2 - x - 4)$  i zapisz ją w postaci sumy przedziałów liczbowych.



**Zadanie 12. (4 pkt)**

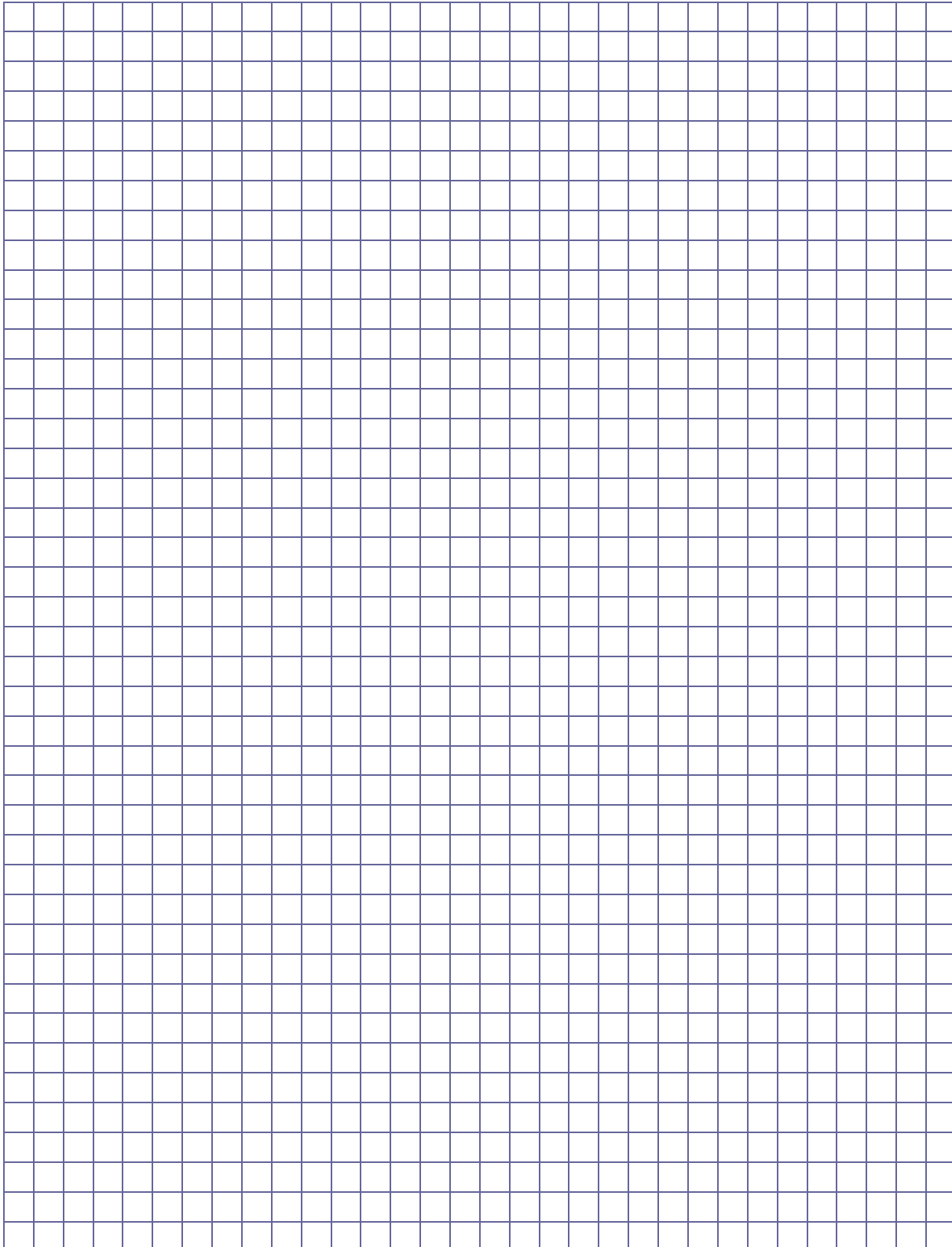
Dana jest funkcja:  $f(x) = \cos x - \sqrt{3} \sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- a) Naszkicuj wykres funkcji  $f$ .
- b) Rozwiąż równanie:  $f(x) = 1$ .



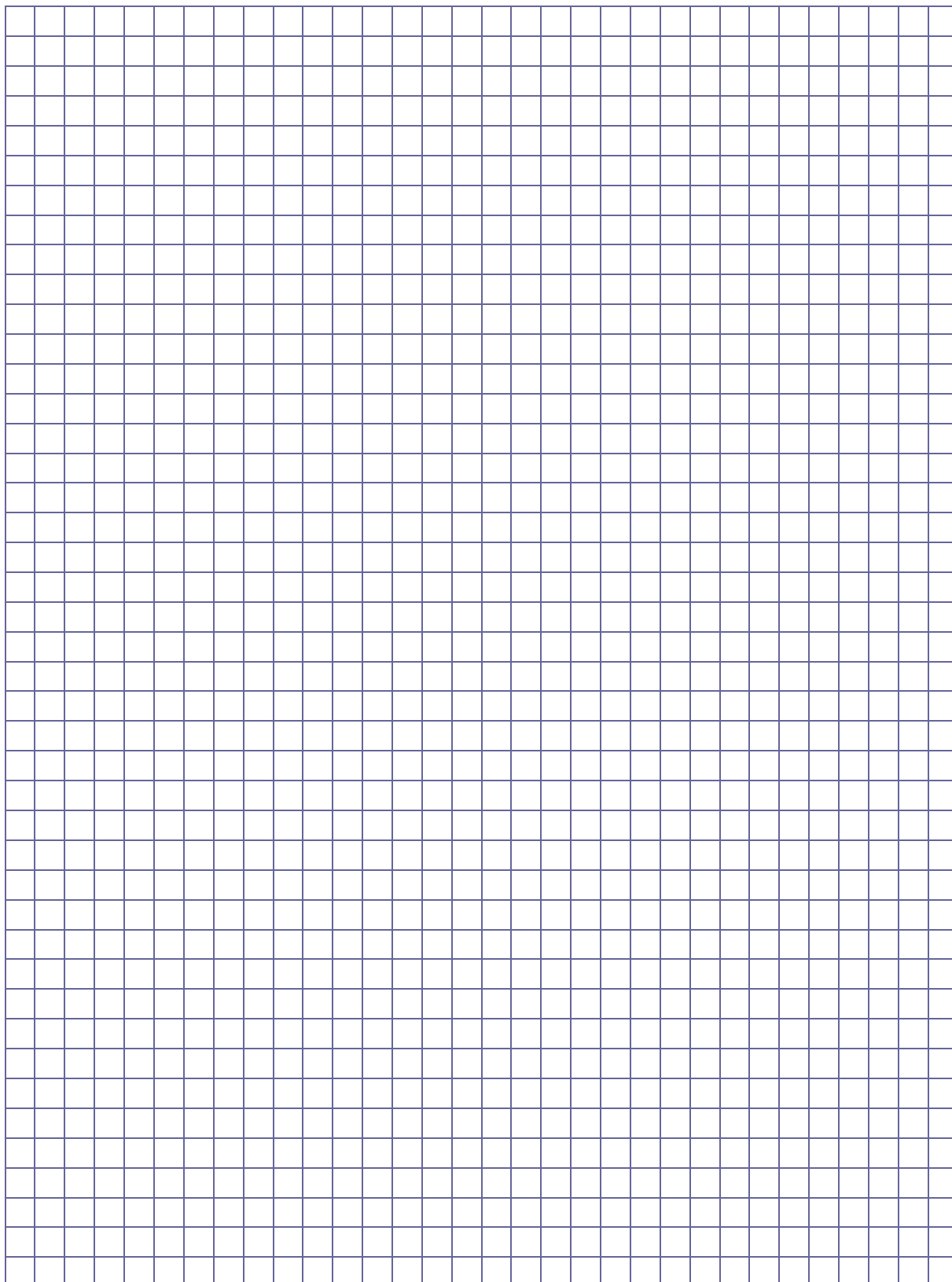
**Zadanie 13. (4 pkt)**

Rzucamy  $n$  razy dwiema symetrycznymi sześciennymi kostkami do gry. Oblicz, dla jakich  $n$  prawdopodobieństwo otrzymania co najmniej raz tej samej liczby oczek na obu kostkach jest mniejsze od  $\frac{671}{1296}$ .



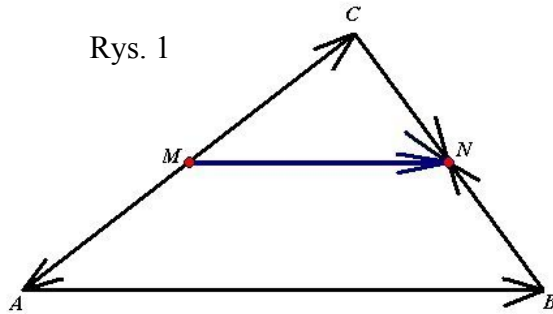
**Zadanie 14. (5 pkt)**

Oblicz:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 4 + 7 + \dots + (3n - 2)}{5 + 7 + 9 + \dots + (2n + 3)}$ .



**Zadanie 15. (4 pkt)**

W dowolnym trójkącie  $ABC$  punkty  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami boków  $AC$  i  $BC$  (Rys. 1).



**Zapoznaj się uważnie z następującym rozumowaniem:**

Korzystając z własności wektorów i działań na wektorach, zapisujemy równości:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} \quad (1)$$

oraz

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CN} \quad (2)$$

Po dodaniu równości (1) i (2) stronami otrzymujemy:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CN}$$

Ponieważ  $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MA}$  oraz  $\overrightarrow{CN} = -\overrightarrow{BN}$ , więc:

$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{BN}$$

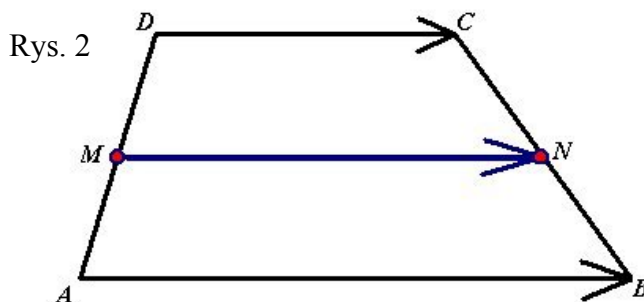
$$2 \cdot \overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{AB} + \vec{0}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

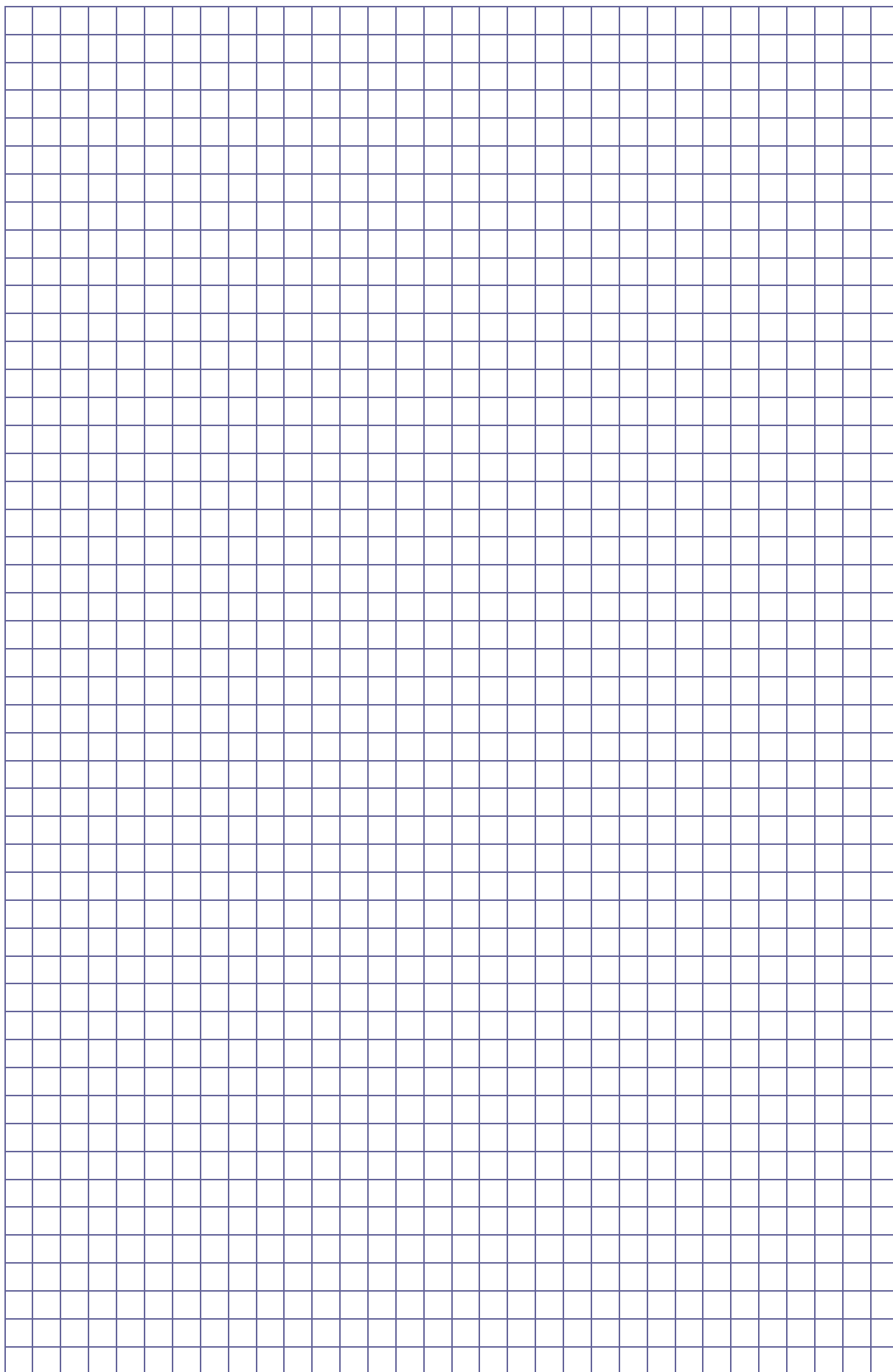
Wykorzystując własności iloczynu wektora przez liczbę, ostatnią równość można zinterpretować następująco:

**odcinek łączący środki dwóch boków dowolnego trójkąta jest równoległy do trzeciego boku tego trójkąta, zaś jego długość jest równa połowie długości tego boku.**

Przeprowadzając analogiczne rozumowanie, ustal związek pomiędzy wektorem  $\overrightarrow{MN}$  oraz wektorami  $\overrightarrow{AB}$  i  $\overrightarrow{DC}$ , wiedząc, że czworokąt  $ABCD$  jest dowolnym trapezem, zaś punkty  $M$  i  $N$  są odpowiednio środkami ramion  $AD$  i  $BC$  tego trapezu (Rys. 2).



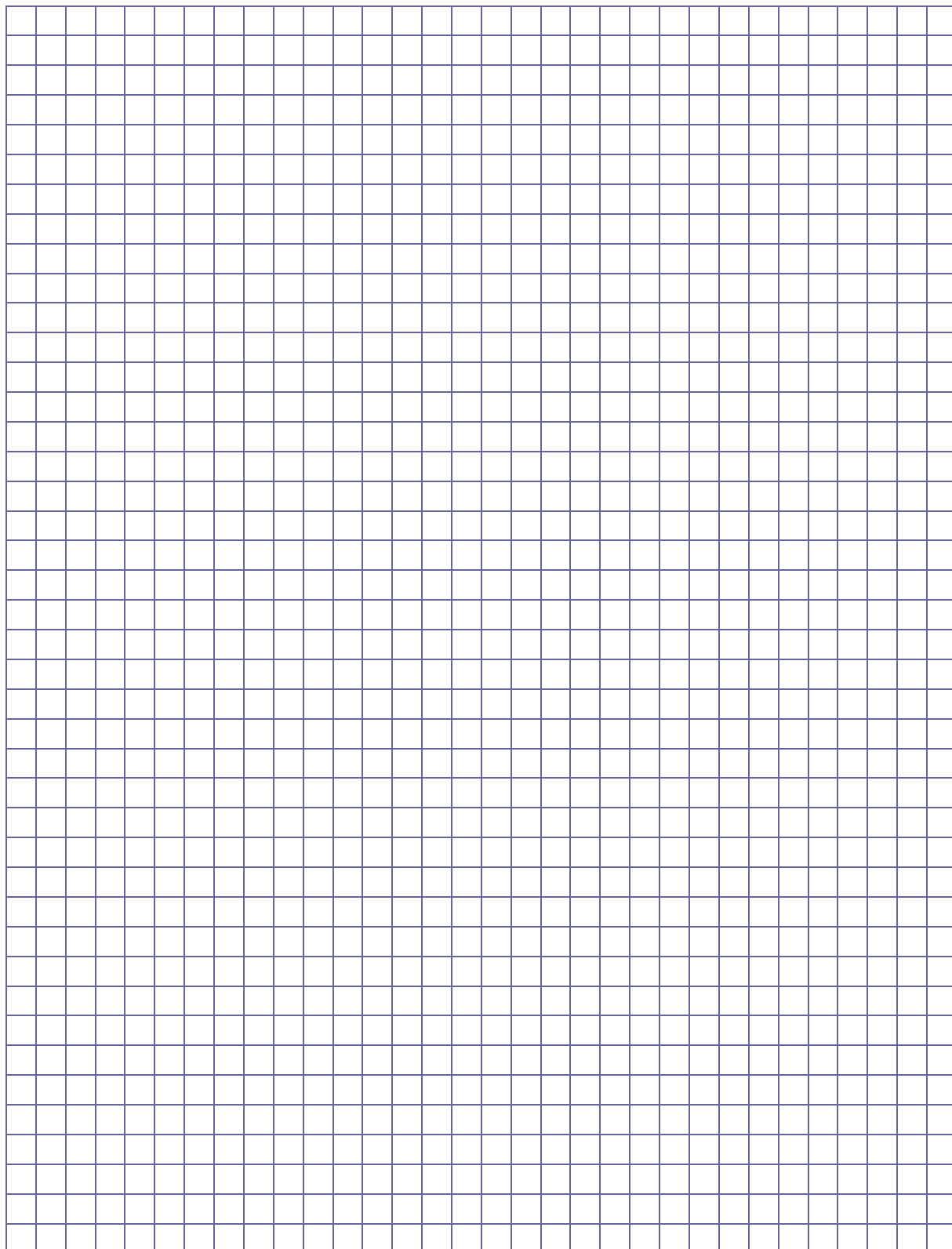
Podaj interpretację otrzymanego wyniku.



**Zadanie 16. (5 pkt)**

Sześcian o krawędzi długości  $a$  przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do płaszczyzny podstawy pod kątem  $\frac{\pi}{3}$ . Sporządź odpowiedni rysunek.

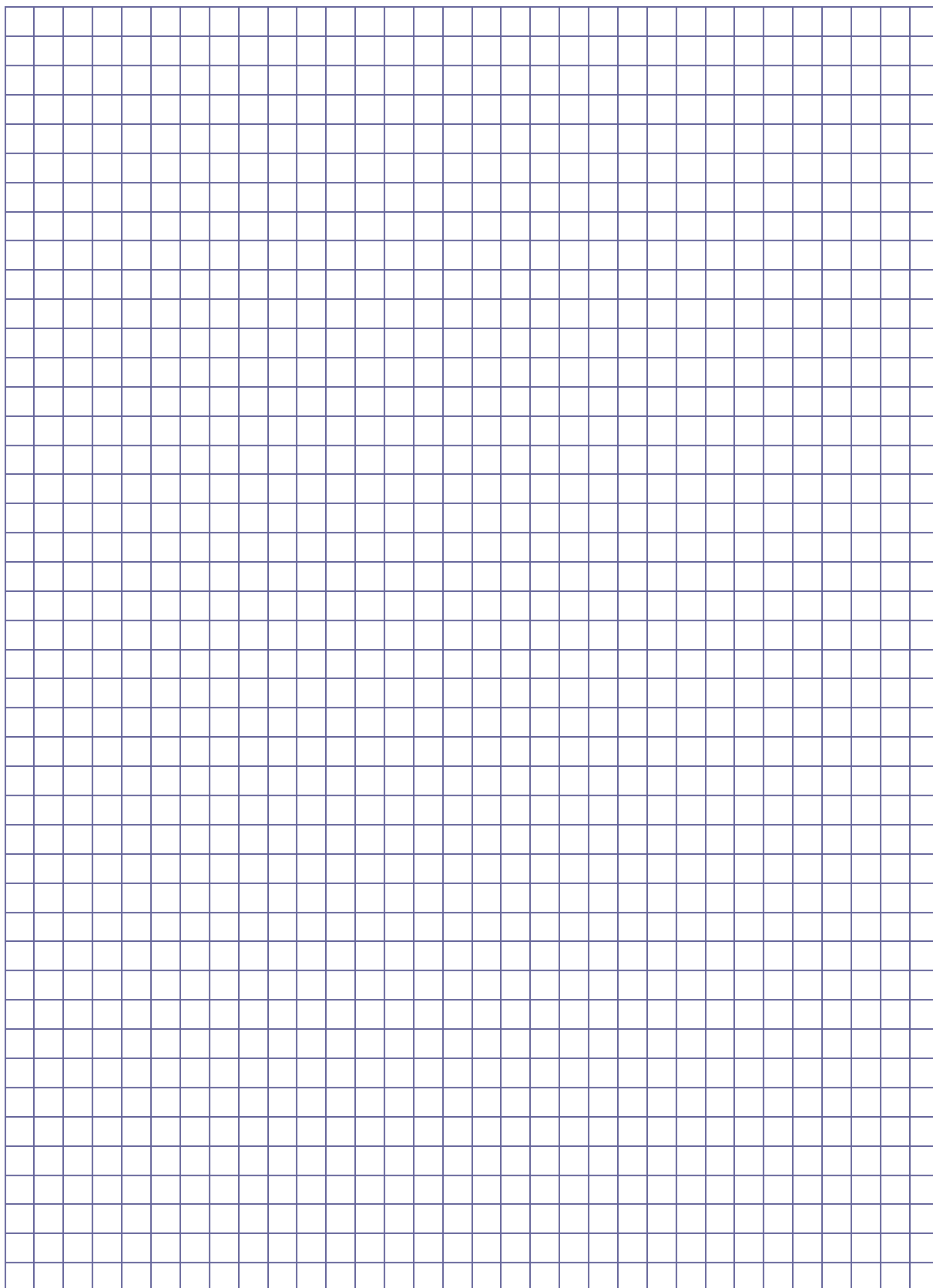
Oblicz pole otrzymanego przekroju.





**Zadanie 17. (7 pkt)**

Wykaż, bez użycia kalkulatora i tablic, że  $\sqrt[3]{5\sqrt{2} + 7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2} - 7}$  jest liczbą całkowitą.



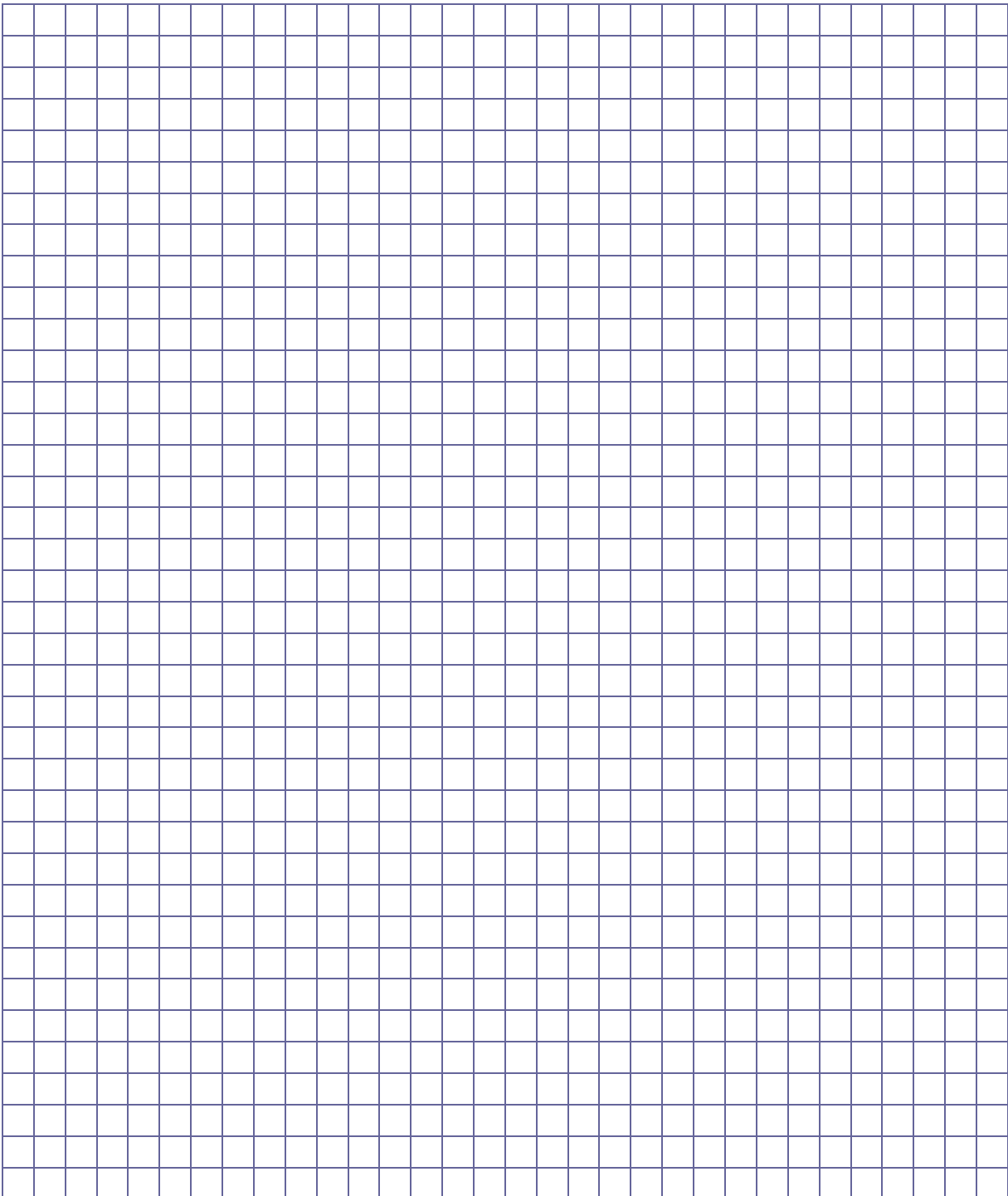
**Zadanie 18. (8 pkt)**

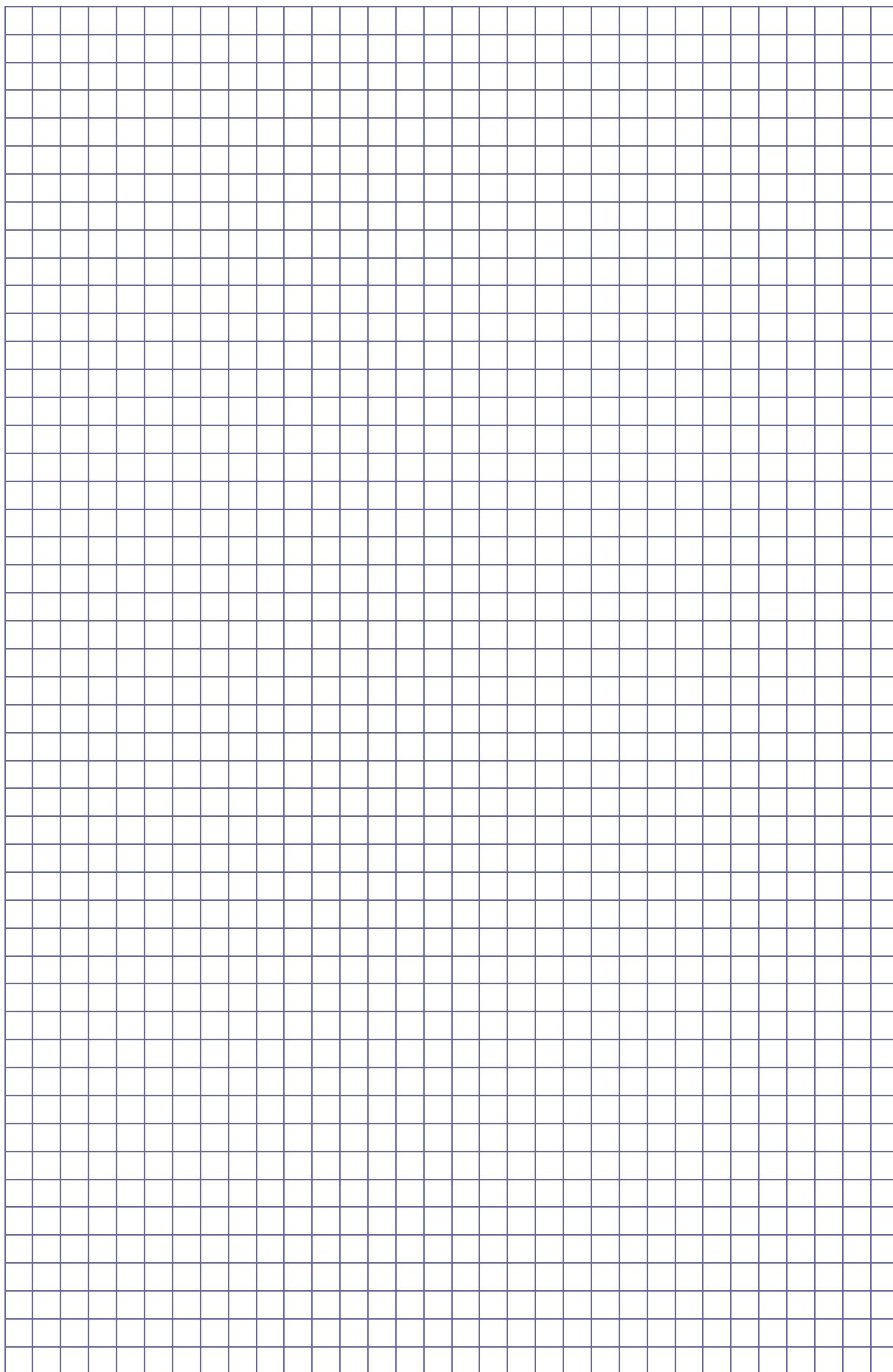
Pary liczb  $(x, y)$  spełniające układ równań:

$$\begin{cases} -4x^2 + y^2 + 2y + 1 = 0 \\ -x^2 + y + 4 = 0 \end{cases}$$

są współrzędnymi wierzchołków czworokąta wypukłego  $ABCD$ .

- Wyznacz współrzędne punktów:  $A, B, C, D$ .
- Wykaż, że czworokąt  $ABCD$  jest trapezem równoramiennym.
- Wyznacz równanie okręgu opisanego na czworokącie  $ABCD$ .

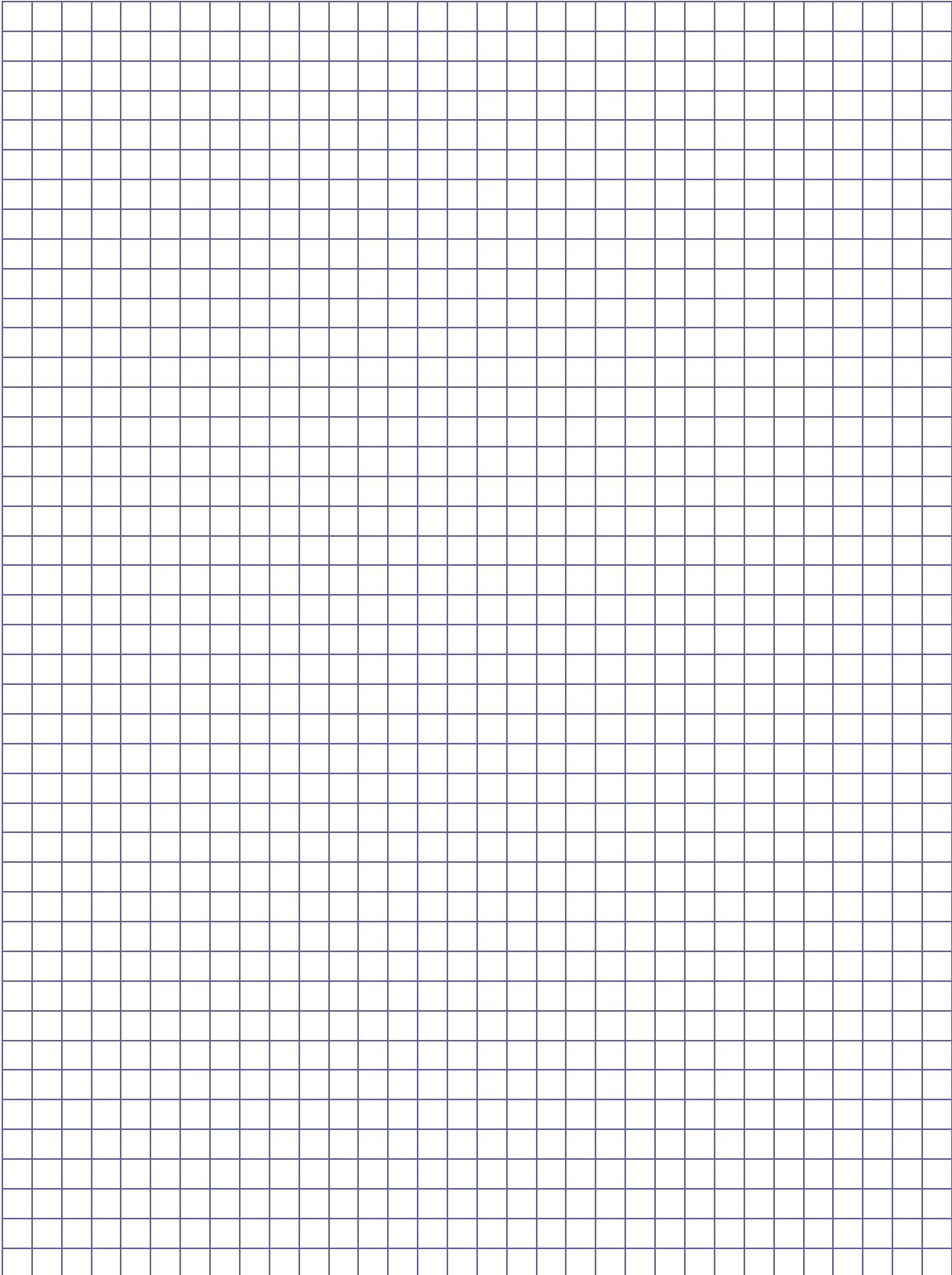


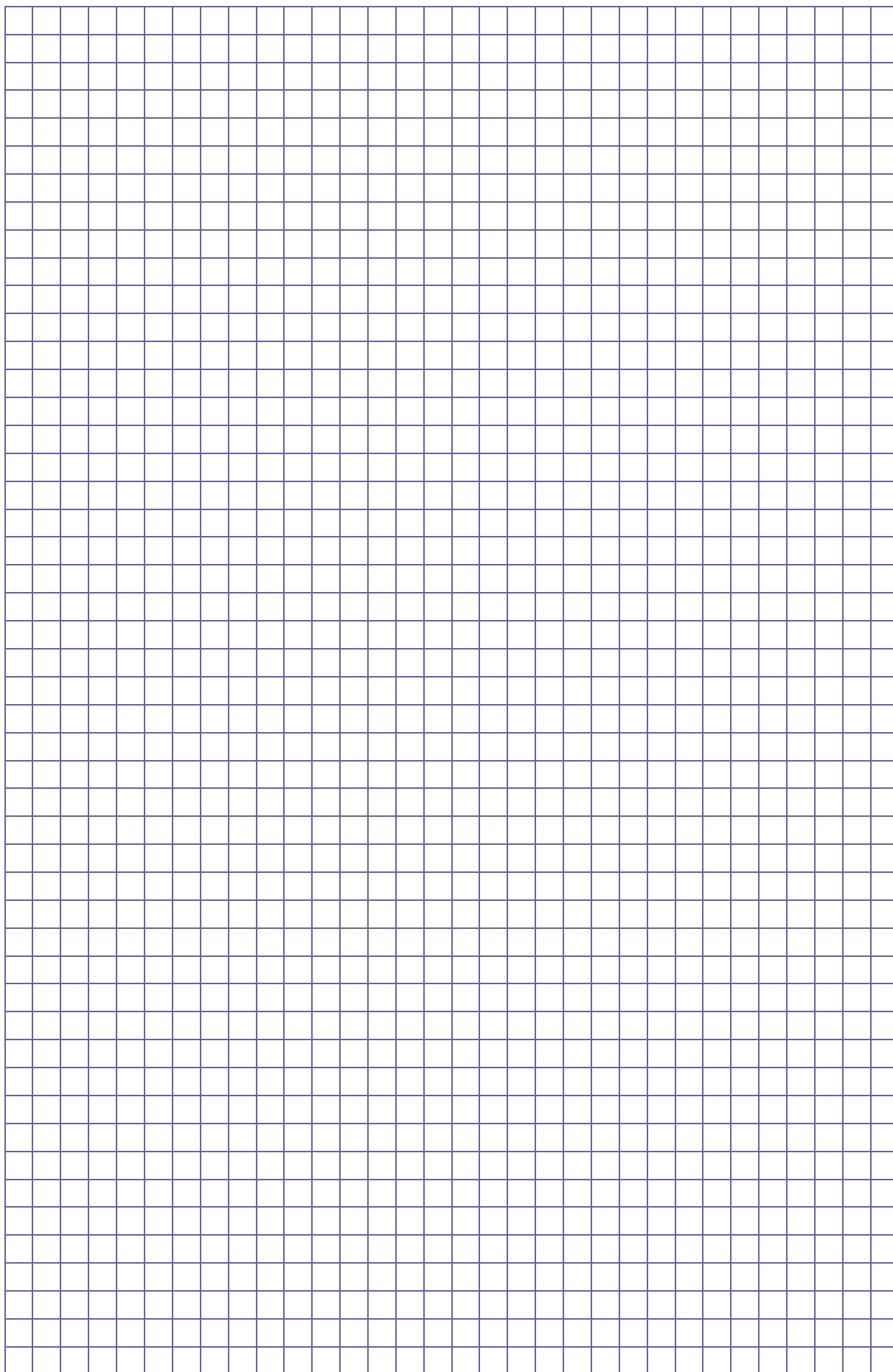


**Zadanie 19. (10 pkt)**

Dane jest równanie:  $x^2 + (m - 5)x + m^2 + m + \frac{1}{4} = 0$ .

Zbadaj, dla jakich wartości parametru  $m$  stosunek sumy pierwiastków rzeczywistych równania do ich iloczynu przyjmuje wartość najmniejszą. Wyznacz tę wartość.





## **BRUDNOPIS**

