

POZIOM ROZSZERZONY

Zadanie 1. (5 pkt)

Udowodnij, że jeżeli $a > 0$, $b > 0$ i $c > 0$ oraz $a + b + c = 1$, to $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 9$.

Zadanie 2. (5 pkt)

Suma pierwszego, drugiego i trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego (a_n) jest równa $\frac{7}{4}$. Liczby te są odpowiednio równe czwartemu, drugiemu i pierwszemu wyrazowi pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1 , a_2 i a_3 .

Zadanie 3. (4 pkt)

Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt K , że jego odległości od boków AB , BC , AC są odpowiednio równe $4\frac{1}{2}$, 6 i $7,5$. Oblicz pole powierzchni trójkąta ABC .

Zadanie 4. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $\sqrt{3} \sin x \cdot \operatorname{tg} x - \sin x - \sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} x = -1$ w przedziale $(0, 2\pi)$.

Zadanie 5. (5 pkt)

Rozwiąż nierówność $|x+2| + |x| + 4|x-5| < 42$.

Zadanie 6. (6 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których równanie $mx^2 + (4m-2)x + 2 - m = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek dodatni.

Zadanie 7. (5 pkt)

W pojemniku znajduje się n kul ($n \geq 5$), z których dokładnie 5 jest białych. Wyznacz wszystkie wartości n takie, że jeżeli będziemy losować z tego pojemnika jednocześnie dwie kule, to prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych będzie większe od $\frac{1}{4}$.

Zadanie 8. (5 pkt)

Dla jakich wartości a i b wielomian $W(x) = 2x^3 + (a-2b)x^2 - (2a+3b)x + 6ab$ dzieli się bez reszty przez trójmian kwadratowy $x^2 - 4$?

Zadanie 9. (5 pkt)

Rozwiąż nierówność $x + \log_{\frac{1}{2}}(12 - 2^{-x}) + 5 < 0$.

Zadanie 10. (6 pkt)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy jest równa $8\sqrt{2}$. Odległość środka symetrii podstawy od ściany bocznej jest równa $\sqrt{7}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

SZKICE ROZWIĄZAŃ

Zadanie 1.

Sprowadzamy lewą stronę tezy do wspólnego mianownika:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc}$$

Korzystając z prawdziwej nierówności:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0.$$

czyli $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac \geq 0$,
oraz z tego, że

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac,$$

otrzymujemy, że

$$(a+b+c)^2 \geq 3ab + 3bc + 3ac \geq 0$$

czyli $ab + bc + ac \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = \frac{1}{3}$ (bo $a+b+c=1$).

Z twierdzenia o średnich dla dodatnich liczb a, b, c mamy, że

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt[3]{abc},$$

czyli $abc < \frac{1}{27}$.

Otrzymujemy zatem

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{bc + ac + ab}{abc} \geq \frac{1}{3} : \frac{1}{27} = 9.$$

Zadanie 2.

Zapisujemy układ równań z niewiadomymi a_1 i q :

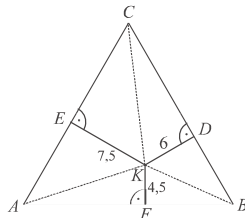
$$\begin{cases} a_1 + a_1q + a_1q^2 = \frac{7}{4} \\ a_1 - a_1q = 2(a_1q - a_1q^2) \end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy:

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ q = \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} a_1 = \frac{7}{12} \\ q = 1 \end{cases}$$

Zatem $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{1}{4}$ lub $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{7}{12}$.

Zadanie 3.



Zauważmy, że $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta MBK} + P_{\Delta MCK} + P_{\Delta MAK}$.

Przyjmijmy, że bok trójkąta ABC jest równy a , natomiast wysokość h . Wtedy

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a(4,5 + 6 + 7,5).$$

Stąd $h = 18$.

Obliczamy długość boku trójkąta ABC :

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = 18, \text{ stąd } a = 12\sqrt{3}.$$

$$\text{Zatem } P_{\Delta ABC} = \frac{(12\sqrt{3})^2 \sqrt{3}}{4} = 108\sqrt{3}.$$

Zadanie 4.

Zakładamy, że $x \neq \frac{\pi}{2}$ i $x \neq \frac{3\pi}{2}$ (tangens dla tych liczb nie istnieje).

Przekształcając dane równanie, otrzymujemy:

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x (\sin x - 1) - (\sin x - 1) = 0$$

$$(\sin x - 1)(\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1) = 0$$

Ostatnia równość zachodzi, jeżeli $\sin x - 1 = 0$ lub $\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0$.

$\sin x = 1$ dla $x = \frac{\pi}{2}$ - to rozwiązanie odrzucamy, gdyż jest sprzeczne z założeniem.

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ dla } x = \frac{\pi}{6} \text{ lub } x = \frac{7\pi}{6}.$$

Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $(0, 2\pi)$ są liczby: $x = \frac{\pi}{6}$ lub $x = \frac{7\pi}{6}$.

Zadanie 5.

Liczby $-2, 0, 5$ dzielą oś liczbową na cztery przedziały liczbowe: $x < -2$, $-2 \leq x < 0$, $0 \leq x < 5$, $x \geq 5$

Przy rozwiązywaniu nierówności $|x+2| + |x| + 4|x-5| < 42$ rozważamy cztery przypadki, tzn. znajdujemy jej rozwiązania w każdym z tych czterech przedziałów, uwzględniając znak wyrażenia pod symbolem wartości bezwzględnej.

$$1^{\circ} \begin{cases} x < -2 \\ (-x-2) + (-x) + 4(-x-5) < 42 \end{cases} \text{ stąd } \begin{cases} x < -2 \\ x > -4 \end{cases} \text{ czyli } x \in (-4, -2)$$

$$2^{\circ} \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ (x+2) + (-x) + 4(-x+5) < 42 \end{cases} \text{ stąd } \begin{cases} -2 \leq x < 0 \\ x > -5 \end{cases} \text{ czyli } -2 \leq x < 0$$

$$3^{\circ} \begin{cases} 0 \leq x < 5 \\ (x+2) + x + 4(-x+5) < 42 \end{cases} \text{ stąd } \begin{cases} 0 \leq x < 5 \\ x > -10 \end{cases} \text{ czyli } 0 \leq x < 5$$

$$4^{\circ} \begin{cases} x \geq 5 \\ (x+2) + x + 4(x-5) < 42 \end{cases} \text{ stąd } \begin{cases} x \geq 5 \\ x < 10 \end{cases} \text{ czyli } 5 \leq x < 10$$

Zbiorem rozwiązań nierówności $|x+2| + |x| + 4|x-5| < 42$ jest suma rozwiązań znalezionych w każdym z przypadków $1^{\circ} - 4^{\circ}$, czyli $x \in (-4, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 5) \cup (5, 10)$

Stąd $x \in (-4, 10)$.

Dokończenie - s. 4 ▶▶▶



Człowiek – najlepsza inwestycja



MATEMATYKA

DZWIĘGNI INNOWACYJNEJ GOSPODARKI
Projekt współfinansowany przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego
STUDIA I-go STOPNIA, kierunek: MATEMATYKA na Wydziale Fizyki Technicznej, Informatyki i Matematyki Stosowanej Politechniki Łódzkiej

Studia I stopnia (licencjackie) na kierunku MATEMATYKA Wydziału FTIMS Politechniki Łódzkiej są w roku akademickim 2012/13 zamawiane przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego

Dlaczego warto być objętym programem studiów zawodowych?

- Do 90 studentów I roku otrzymuje stypendia w wysokości 1000 zł miesięcznie
 - Kandydaci objęci są kursem wyrównawczym uzupełniającym wiedzę – uczestnictwo w kursie jest swobodną decyzją umożliwiającą dalsze studia na Wydziale FTIMS bez polnieć i porażek
 - Do 90 (70) studentów II roku (III roku) otrzymuje stypendia w wysokości 1000 zł miesięcznie
 - KAZDY student II roku będzie miał możliwość uczestnictwa w finansowanym przez Unię Europejską kursie uatrakliwiającym kształcenie – proponujemy następujące kursy: „Badania operacyjne”, „Stosowana ekonomia matematyczna”, „Statystyczne opracowanie danych”
 - KAZDY student III roku, będzie mógł wziąć udział w kursie doszkalającym, ułatwiającym odnalezienie się na rynku pracy – do wyboru: język angielski biznesowy, kurs księgowości, kurs analityki finansowej, kurs maklerski (makler papierów wartościowych)
- Dlaczego warto studiować MATEMATYKĘ właśnie na Wydziale FTIMS PL?
- Politechnika Łódzka zajmuje 4. miejsce wśród

uczelniami technicznymi w rankingu edukacyjnym „Rzeczpospolitej”

- Wydział FTIMS plasuje się wysoko w rankingach jednostek naukowych
 - Instytut Matematyki ma wysoko wykwalifikowaną i dynamiczną kadrę dydaktyczną (aż 14 na 37 pracowników to profesorerowie nadzwyczajni lub zwyczajni), rozwija się dynamicznie, dostosowując programy nauczania do wciągających się realiów na rynku pracy, zachowuje wysokie standardy dydaktyczne i naukowe
 - Proponujemy atrakcyjne na rynku pracy specjalności
- Co zyskujesz, wybierając studia matematyczne na wydziale FTIMS?
- Nauczysz się zagadnień związanych z matematyką finansową, ekonomią matematyczną, statystyką i modelowaniem matematycznym
 - Masz wiele możliwości dalszego kształcenia lub podjęcia satysfakcjonującej pracy zawodowej
 - Stajesz się atrakcyjny dla przyszłego pracodawcy.
- <http://www.im.p.lodz.pl/kandydaci/studiazamawiane.html>

Uczelnia Heleny Chodkowskiej

Rok zał. 1992

NA PODIUM W OGÓLNOPOLSKICH RANKINGACH:

II MIEJSCE
w Rankingu Uczelni Ekonomicznych
Gazety Bankowej

III MIEJSCE
w Rankingu Wydziałów Prawa
Dziennika Gazety Prawnej

II MIEJSCE
w Rankingu Uczelni z Kierunkiem Zarządzanie
Gazety Warszawskiej

**UCZELNIA
NA SZÓSTKĘ Z PLUSEM**
najlepiej oceniana przez studentów w rankingu
przeprowadzonym przez Redakcję Gazety Warszawskiej

UCZELNIA HELENY CHODKOWSKIEJ KSZTAŁCI NA KIERUNKACH:

ZARZĄDZANIE, PSYCHOLOGIA W BIZNESIE, FINANSE I RACHUNKOWOŚĆ, BEZPIECZEŃSTWO
WEWNĘTRZNE, ADMINISTRACJA, PRAWO, PSYCHOLOGIA, PSYCHOLOGIA DLA MAGISTRÓW

WIEDZA • PRESTIŻ • PRZYSZŁOŚĆ

www.chodkowska.edu.pl

►► Dokończenie ze s. 3

Zadanie 6.

Równanie kwadratowe $ax^2 + bx + c = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek dodatni w następujących przypadkach:

1°. Istnieje tylko jeden pierwiastek dodatni, czyli gdy:

$$\left(a = 0 \wedge b \neq 0 \wedge -\frac{c}{b} > 0 \right) \text{ lub } \left(a \neq 0 \wedge \Delta = 0 \wedge -\frac{b}{2a} > 0 \right)$$

2°. Istnieją dwa pierwiastki - jeden jest dodatni, a drugi równy 0, czyli gdy:

$$a \neq 0 \wedge \Delta > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = 0 \wedge x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$$

3°. Istnieją dwa pierwiastki przeciwnych znaków, czyli gdy:

$$a \neq 0 \wedge \Delta > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} < 0$$

4°. Istnieją dwa pierwiastki dodatnie, czyli gdy:

$$a \neq 0 \wedge \Delta > 0 \wedge x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} > 0 \wedge x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} > 0$$

W równaniu $mx^2 + (4m-2)x + 2 - m = 0$ mamy: $a = m$, $b = 4m - 2$, $c = 2 - m$. Rozważamy poszczególne przypadki:

Ad. 1°. Jeśli $m = 0$ to otrzymujemy równanie $-2x + 2 = 0$, którego rozwiązaniem jest $x = 1$, czyli warunki zadania są spełnione.

Jeżeli

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \\ -\frac{b}{2a} > 0 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m^2 - 6m + 1 = 0 \\ \frac{2-4m}{2m} > 0 \end{cases}, \begin{cases} m \neq 0 \\ 5\left(m - \frac{1}{5}\right)(m-1) = 0, \text{ st}^d m = \frac{1}{5} \text{ lub } m = 1 \\ m(1-2m) > 0 \end{cases} \begin{cases} m \neq 0 \\ m = \frac{1}{5} \text{ lub } m = 1 \\ m \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Zatem $m = \frac{1}{5}$. Przypadek pierwszy jest więc spełniony dla $m = 0$ lub $m = \frac{1}{5}$.

Ad. 2°.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} = 0 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m^2 - 6m + 1 > 0 \\ \frac{2-4m}{m} > 0 \\ \frac{2-m}{m} = 0 \end{cases}, \begin{cases} m \neq 0 \\ m \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup (1, \infty) \\ m \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ m = 2 \end{cases}, \text{ st}^d m \in \emptyset$$

Ad. 3°.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ \frac{c}{a} < 0 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m^2 - 6m + 1 > 0 \\ \frac{2-m}{m} < 0 \end{cases}, \begin{cases} m \neq 0 \\ m \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup (1, \infty) \\ m \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty) \end{cases}$$

Ad. 4°.

$$\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \\ -\frac{b}{a} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} m \neq 0 \\ 5m^2 - 6m + 1 > 0 \\ \frac{2-4m}{m} > 0 \\ \frac{2-m}{m} > 0 \end{cases}, \begin{cases} m \neq 0 \\ m \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup (1, \infty) \\ m \in \left(0, \frac{1}{2}\right) \\ m \in (0, 2) \end{cases}, \text{ st}^d m \in \left(0, \frac{1}{5}\right)$$

Łącząc alternatywy wszystkich czterech przypadków, otrzymujemy, że równanie $mx^2 + (4m-2)x + 2 - m = 0$ ma co najmniej jeden pierwiastek dodatni dla $m \in \left(-\infty, \frac{1}{5}\right) \cup (2, \infty)$.

Zadanie 7.

Liczba wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$, a zdarzeniu A polegającemu na tym,

że wylosujemy dwie kule białe, sprzyja $|A| = \binom{5}{2} = 10$ zdarzeń elementarnych. Wobec tego: $P(A) = \frac{20}{n(n-1)}$

$$\text{Z warunków zadania } P(A) > \frac{1}{4}, \text{ zatem } \frac{20}{n(n-1)} > \frac{1}{4}$$

Rozwiązujemy tę nierówność (obie strony są liczbami dodatnimi) i otrzymujemy $n(n-1) < 80$ czyli $n^2 - n - 80 < 0$.

Nierówność ta jest spełniona dla $\frac{1 - \sqrt{321}}{2} < n < \frac{1 + \sqrt{321}}{2}$. Ponieważ $n \geq 5$ oraz $\sqrt{321} > 17$, więc $n \leq \frac{1+17}{2} = 9$.

Zatem $n \in \{5, 6, 7, 8, 9\}$.

Zadanie 8.

Wielomian $W(x) = 2x^3 + (a-2b)x^2 - (2a+3b)x + 6ab$ dzieli się bez reszty przez trójmian $x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(2) = W(-2) = 0$.

$$\begin{cases} 2 \cdot 8 + 4(a-2b) - 2(2a+3b) + 6ab = 0 \\ 2 \cdot (-8) + 4(a-2b) + 2(2a+3b) + 6ab = 0 \end{cases}$$

Z układu tego przez dodanie stronami oraz przez odejmowanie stronami otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} 8(a-2b) + 12ab = 0 \\ -32 + 4(2a+3b) = 0 \end{cases}$$

Rozwiązaniami tego układu są liczby: $a = 1$ i $b = 2$ lub $a = \frac{16}{3}$ i $b = -\frac{8}{9}$.

Zadanie 9.

Zakładamy, że $12 - 2^{-x} > 0$, czyli $2^{-x} < 12$, zatem $x > \log_{\frac{1}{2}} 12 = \log_{\frac{1}{2}} 3 - 2$.

Przekształcamy kolejno:

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^x + \log_{\frac{1}{2}} (12 - 2^{-x}) &< \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} \\ \log_{\frac{1}{2}} 2^{-x} (12 - 2^{-x}) &< \log_{\frac{1}{2}} 32 \\ 2^{-x} (12 - 2^{-x}) &> 32 \end{aligned}$$

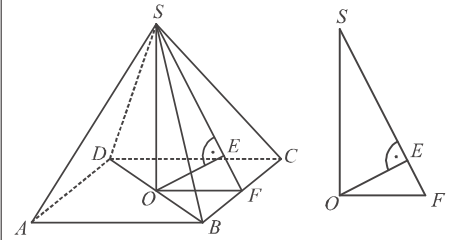
Dokonyjemy podstawienia $t = 2^{-x}$ ($0 < t < 12$):

$$t(12-t) > 32 \quad t^2 - 12t + 32 < 0$$

Rozwiązaniem tej nierówności jest $t \in (4, 8)$. Jest to zgodne z założeniem, zatem $4 < 2^{-x} < 8$ czyli $x \in (-3, -2)$.

Zadanie 10.

Szkicujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia:



Przekątna podstawy ostrosłupa jest równa $8\sqrt{2}$, zatem $|OF| = 4$.

$$|OE| = \sqrt{7}$$

SO - wysokość ostrosłupa, SF - wysokość ściany bocznej

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa z trójkąta prostokątnego OEF otrzymujemy:

$$|EF| = \sqrt{4^2 - (\sqrt{7})^2} = 3$$

Trójkąt OEF jest podobny do trójkąta OES , zatem

$$\frac{|SE|}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{3} \quad \text{oraz} \quad \frac{|SO|}{4} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\text{Stąd } |SE| = \frac{7}{3} \quad \text{oraz} \quad |SO| = \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

$$|SF| = 3 + \frac{7}{3} = \frac{16}{3}$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa:

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \frac{16}{3} = \frac{256}{3}$$

Obliczamy objętość tego ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 8^2 \cdot \frac{4\sqrt{7}}{3} = \frac{256\sqrt{7}}{9}$$

Samochodowy Atlas Polski 2012

Jutro - część 1.
W środę - część 2.

gazeta Wyborcza

Uczelnia Łazarskiego
Sukces można studiować!

TEORIA W PRAKTYCE
WARSZTATY I CASE STUDY
WYKŁADY PRAKTYKÓW
SYMULACJE ROZPRAW SĄDOWYCH

Sprawdź naszą ofertę na www.rekrutacja.lazarski.pl

Uczelnia Łazarskiego
ul. Świerzyńska 43, 02-662 Warszawa
tel. +48 22 543 95 19

Partnerzy programów edukacyjnych:
E.A. S. WISCIŃSKI, Wirtualny Uniwersytet, WU, WU, WU

Dlatego 96% naszych absolwentów znajduje pracę zaraz po studiach

GAZETA EDUKACJA

SEKCYJA POLICJAŁNE
POLICJANINA SZKOLA REKRYCJA
LICZNIK DLA RODZICIELI
ORAZ INNI
KURSY MATURALNE I ZAWODOWE
SZKI I INNI

Subskrypcje do naszych oddziałów w:
Łodzi, Częstochowie, Opatowie, Górzejcu, Gdańsku, Białymostku, Wrocławiu, Katowicach, Jastrzębie, Elblągu, Olsztynie, Poznaniu, Radomiu, Rzeszowie, Rybniku, Sosnowcu, Suwałkach, Szamku, Warszawie, Wrocławiu, Zielonej Górze i in.

132 strony 6,99 zł

**RACZKOWSKI • ZIELIŃSKA • HUELLE • FINI
LUTENS • GIĘREK • ESTÉS • LAM • ŁEPKOWSKA
KWIATKOWSKA • COPPOLA • JELEŃSKI**

Nowy numer już w sprzedaży

Partnerem bezpłatnej aplikacji WOE na iPada jest **VISA**