POZIOM ROZSZERZONY

Zadanie 1. (5 pkt)

Udowodnij, że jeżeli $a>0$, $b>0$ i $c>0$ oraz $a+b+c=1$, to $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq 9$.

Zadanie 2. (5 pkt)

Suma pierwszego, drugiego i trzeciego wyrazu ciągu geometrycznego (a_n) jest równa $\frac{7}{4}$. Liczby te są odpowiednio równe czwartemu, drugiemu i pierwszemu wyrazowi pewnego ciągu arytmetycznego. Oblicz a_1, a_2 i a_3.

Zadanie 3. (4 pkt)

Wewnątrz trójkąta równobocznego ABC obrano taki punkt K, że jego odległości od boków AB, BC, AC są odpowiednio równe $4\frac{1}{2}$, 6 i 7,5. Oblicz pole powierzchni trójkąta ABC.

Zadanie 4. (4 pkt)

Rozwiąż równanie $\sqrt{3}\sin x\cdot\operatorname{tg} x-\sin x-\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg} x=-1$ w przedziale $\langle 0,\ 2\pi\rangle$.

Zadanie 5. (5 pkt)

Rozwiąż nierówność $|x+2|+|x|+4|x-5|<42$.

Zadanie 6. (6 pkt)

Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $mx^2+(4m-2)x+2-m=0$ ma co najmniej jeden pierwiastek dodatni.

Zadanie 7. (5 pkt)

W pojemniku znajduje się n kul $(n\geq 5)$, z których dokładnie 5 jest białych. Wyznacz wszystkie wartości n takie, że jeżeli będziemy losować z tego pojemnika jednocześnie dwie kule, to prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kul białych będzie większe od $\frac{1}{4}$.

Zadanie 8. (5 pkt)

Dla jakich wartości a i b wielomian $W(x)=2x^3+(a-2b)x^2-(2a+3b)x+6ab$ dzieli się bez reszty przez trójmian kwadratowy x^2-4?

Zadanie 9. (5 pkt)

Rozwiąż nierówność $x+\log_{\frac{1}{2}}\left(12-2^{-x}\right)+5<0$.

Zadanie 10. (6 pkt)

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy jest równa $8\sqrt{2}$. Odległość środka symetrii podstawy od ściany bocznej jest równa $\sqrt{7}$. Oblicz objętość i pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

SZKICE ROZWIĄZAŃ

Zadanie 1.

Sprowadzamy lewą stronę tezy do wspólnego mianownika:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}.$$

Korzystając z prawdziwej nierówności:

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2\geq 0.$$

czyli $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac\geq 0$.

oraz z tego, że

$$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac,$$

otrzymujemy, że

$$(a+b+c)^2-3ab-3bc-3ac\geq 0$$

czyli $ab+bc+ac\leq\frac{(a+b+c)^2}{3}=\frac{1}{3}$ (bo $a+b+c=1$).

Z twierdzenia o średnich dla dodatnich liczb a, b, c mamy, że

$$\frac{a+b+c}{3}>\sqrt[3]{abc},$$

czyli $abc<\frac{1}{27}$.

Otrzymujemy zatem

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc+ac+ab}{abc}\geq\frac{1}{3}:\frac{1}{27}=9.$$

Zadanie 2.

Zapisujemy układ równań z niewiadomymi a_1 i q:

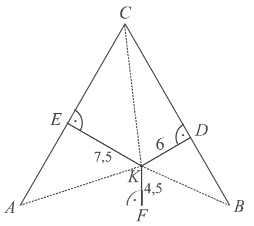
$$\begin{cases}a_1+a_1q+a_1q^2=\frac{7}{4}\\ a_1-a_1q=2\left(a_1q-a_1q^2\right)\end{cases}$$

Po rozwiązaniu tego układu otrzymujemy:

$$\begin{cases}a_1=1\\ q=\frac{1}{2}\end{cases}\quad\text{lub}\quad\begin{cases}a_1=\frac{7}{12}\\ q=1\end{cases}$$

Zatem $a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{1}{4}$ lub $a_1=a_2=a_3=\frac{7}{12}$.

Zadanie 3.



Zauważmy, że $P_{\Delta ABC}=P_{\Delta ABK}+P_{\Delta BCK}+P_{\Delta ACK}$.

Przyjmijmy, że bok trójkąta ABC jest równy a, natomiast wysokość h. Wtedy

$$\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}a(4,5+6+7,5).$$

Stąd $h=18$.

Obliczamy długość boku trójkąta ABC:

$$\frac{a\sqrt{3}}{2}=18,\ \text{stąd}\ a=12\sqrt{3}.$$

Zatem $P_{\Delta ABC}=\frac{\left(12\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}}{4}=108\sqrt{3}$.

Zadanie 4.

Zakładamy, że $x\neq\frac{\pi}{2}$ i $x\neq\frac{3\pi}{2}$ (tangens dla tych liczb nie istnieje).

Przekształcając dane równanie, otrzymujemy:

$$\sqrt{3}\operatorname{tg}x(\sin x-1)-(\sin x-1)=0$$

$$(\sin x-1)\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1\right)=0$$

Ostatnia równość zachodzi, jeżeli $\sin x-1=0$ lub $\sqrt{3}\operatorname{tg}x-1=0$.

$\sin x=1$ dla $x=\frac{\pi}{2}$ - to rozwiązanie odrzucamy, gdyż jest sprzeczne z założeniem.

$\operatorname{tg}x=\frac{\sqrt{3}}{3}$ dla $x=\frac{\pi}{6}$ lub $x=\frac{7\pi}{6}$.

Zatem rozwiązaniami tego równania w przedziale $\langle 0,\ 2\pi\rangle$ są liczby: $x=\frac{\pi}{6}$ lub $x=\frac{7\pi}{6}$.

Zadanie 5.

Liczby –2, 0, 5 dzielą oś liczbową na cztery przedziały liczbowe:

$x<-2$, $-2\leq x<0$, $0\leq x<5$, $x\geq 5$

Przy rozwiązywaniu nierówności $|x+2|+|x|+4|x-5|<42$ rozważamy cztery przypadki, tzn. znajdujemy jej rozwiązania w każdym z tych czterech przedziałów, uwzględniając znak wyrażenia pod symbolem wartości bezwzględnej.

$1^{\circ}.\ \begin{cases}x<-2\\ (-x-2)+(-x)+4(-x+5)<42\end{cases}$ stąd $\begin{cases}x<-2\\ x>-4\end{cases}$ czyli $x\in(-4,-2)$

$2^{\circ}.\ \begin{cases}-2\leq x<0\\ (x+2)+(-x)+4(-x+5)<42\end{cases}$ stąd $\begin{cases}-2\leq x<0\\ x>-5\end{cases}$ czyli $-2\leq x<0$

$3^{\circ}.\ \begin{cases}0\leq x<5\\ (x+2)+x+4(-x+5)<42\end{cases}$ stąd $\begin{cases}0\leq x<5\\ x>-10\end{cases}$ czyli $0\leq x<5$

$4^{\circ}.\ \begin{cases}x\geq 5\\ (x+2)+x+4(x-5)<42\end{cases}$ stąd $\begin{cases}x\geq 5\\ x<10\end{cases}$ czyli $5\leq x<10$

Zbiorem rozwiązań nierówności $|x+2|+|x|+4|x-5|<42$ jest suma rozwiązań znalezionych w każdym z przypadków 1° - 4°, czyli $x\in(-4,-2)\cup\langle -2,0)\cup\langle 0,5)\cup\langle 5,10)$

Stąd $x\in(-4,10)$.

Dokończenie – s. 4 ►►►

▸▸▸ Dokończenie ze s. 3

Zadanie 6.

Równanie kwadratowe $ax^2+bx+c=0$ ma co najmniej jeden pierwiastek dodatni w następujących przypadkach:

1°. Istnieje tylko jeden pierwiastek dodatni, czyli gdy:

$$\left(a=0 \text{ i } b\neq 0 \text{ i } -\frac{c}{b}>0\right) \text{ lub } \left(a\neq 0 \text{ i } \Delta=0 \text{ i } -\frac{b}{2a}>0\right)$$

2°. Istnieją dwa pierwiastki - jeden jest dodatni, a drugi równy 0, czyli gdy:

$$a\neq 0 \text{ i } \Delta>0 \text{ i } x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=0 \text{ i } x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$$

3°. Istnieją dwa pierwiastki przeciwnych znaków, czyli gdy:

$$a\neq 0 \text{ i } \Delta>0 \text{ i } x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}<0$$

4°. Iistnieją dwa pierwiastki dodatnie, czyli gdy:

$$a\neq 0 \text{ i } \Delta>0 \text{ i } x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}>0 \text{ i } x_1+x_2=-\frac{b}{a}>0$$

W równaniu $mx^2+(4m-2)x+2-m=0$ mamy: $a=m$, $b=4m-2$, $c=2-m$. Rozważamy poszczególne przypadki:

Ad. 1°. Jeśli $m=0$ to otrzymujemy równanie $-2x+2=0$, którego rozwiązaniem jest $x=1$, czyli warunki zadania są spełnione.

Jeżeli

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta=0 \\ -\frac{b}{2a}>0 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} m\neq 0 \\ 5m^2-6m+1=0 \\ \frac{2-4m}{2m}>0 \end{cases}, \quad \begin{cases} m\neq 0 \\ 5\left(m-\frac{1}{5}\right)(m-1)=0 \\ m(1-2m)>0 \end{cases}, \text{ st¹d } \begin{cases} m\neq 0 \\ m=\frac{1}{5} \text{ lub } m=1 \\ m\in\left(0,\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

Zatem $m=\frac{1}{5}$. Przypadek pierwszy jest więc spełniony dla $m=0$ lub $m=\frac{1}{5}$.

Ad. 2°.

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ -\frac{b}{a}>0 \\ \frac{c}{a}=0 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} m\neq 0 \\ 5m^2-6m+1>0 \\ \frac{2-4m}{m}>0 \\ \frac{2-m}{m}=0 \end{cases}, \quad \begin{cases} m\neq 0 \\ m\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)\cup(1,\infty) \\ m\in\left(0,\frac{1}{2}\right) \\ m=2 \end{cases}, \text{ st¹d } m\in\varnothing$$

Ad. 3°.

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ \frac{c}{a}<0 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} m\neq 0 \\ 5m^2-6m+1>0 \\ \frac{2-m}{m}<0 \end{cases}, \quad \begin{cases} m\neq 0 \\ m\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)\cup(1,\infty) \\ m\in(-\infty,0)\cup(2,\infty) \end{cases}, \text{ st¹d } m\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$$

Ad. 4°.

$$\begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta>0 \\ -\frac{b}{a}>0 \\ \frac{c}{a}>0 \end{cases} \text{ czyli } \begin{cases} m\neq 0 \\ 5m^2-6m+1>0 \\ \frac{2-4m}{m}>0 \\ \frac{2-m}{m}>0 \end{cases}, \quad \begin{cases} m\neq 0 \\ m\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right)\cup(1,\infty) \\ m\in\left(0,\frac{1}{2}\right) \\ m\in(0,2) \end{cases}, \text{ st¹d } m\in\left(0,\frac{1}{5}\right)$$

Łącząc alternatywę wszystkich czterech przypadków, otrzymujemy, że równanie $mx^2+(4m-2)x+2-m=0$ ma co najmniej jeden pierwiastek dodatni dla $m\in\left(-\infty,\frac{1}{5}\right\rangle\cup(2,\infty)$.

Zadanie 7.

Liczba wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych jest równa $|\Omega|=\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, a zdarzeniu A polegającego na tym, że wylosujemy dwie kule białe, sprzyja $|A|=\binom{5}{2}=10$ zdarzeń elementarnych. Wobec tego: $P(A)=\frac{20}{n(n-1)}$

Z warunków zadania $P(A)>\frac{1}{4}$, zatem $\frac{20}{n(n-1)}>\frac{1}{4}$

Rozwiązujemy tę nierówność (obie strony są liczbami dodatnimi) i otrzymujemy $n(n-1)<80$

czyli $n^2-n-80<0$.

Nierówność ta jest spełniona dla $\frac{1-\sqrt{321}}{2}<n<\frac{1+\sqrt{321}}{2}$. Ponieważ $n\geq 5$ oraz $\sqrt{321}>17$, więc $n\leq\frac{1+17}{2}=9$.

Zatem $n\in\{5,6,7,8,9\}$.

Zadanie 8.

Wielomian $W(x)=2x^3+(a-2b)x^2-(2a+3b)x+6ab$ dzieli się bez reszty przez trójmian $x^2-4=(x-2)(x+2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $W(2)=W(-2)=0$.

Otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} 2\cdot 8+4(a-2b)-2(2a+3b)+6ab=0 \\ 2\cdot(-8)+4(a-2b)+2(2a+3b)+6ab=0 \end{cases}$$

Z układu tego przez dodanie stronami oraz przez odejmowanie stronami otrzymujemy układ:

$$\begin{cases} 8(a-2b)+12ab=0 \\ -32+4(2a+3b)=0 \end{cases}$$

Rozwiązaniami tego układu są liczby: $a=1$ i $b=2$ lub $a=\frac{16}{3}$ i $b=-\frac{8}{9}$.

Zadanie 9.

Zakładamy, że $12-2^{-x}>0$, czyli $2^{-x}<12$,

zatem $x>\log_{\frac{1}{2}}12=\log_{\frac{1}{2}}3-2$.

Przekształcamy kolejno:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^x+\log_{\frac{1}{2}}\left(12-2^{-x}\right)<\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$$

$$\log_{\frac{1}{2}}2^{-x}\left(12-2^{-x}\right)<\log_{\frac{1}{2}}32$$

$$2^{-x}\left(12-2^{-x}\right)>32$$

Dokonujemy podstawienia $t=2^{-x}$ $(0<t<12)$:

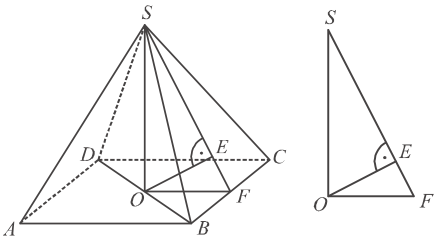
$t(12-t)>32$ $\quad t^2-12t+32<0$

Rozwiązaniem tej nierówności jest $t\in(4,8)$. Jest to zgodne z założeniem, zatem

$4<2^{-x}<8$ czyli $x\in(-3,-2)$.

Zadanie 10.

Szkicujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia:



Przekątna podstawy ostrosłupa jest równa $8\sqrt{2}$, zatem $|OF|=4$.

$|OE|=\sqrt{7}$

SO - wysokość ostrosłupa, SF - wysokość ściany bocznej

Na podstawie twierdzenia Pitagorasa z trójkąta prostokątnego OEF otrzymujemy:

$$|EF|=\sqrt{4^2-\left(\sqrt{7}\right)^2}=3$$

Trójkąt OEF jest podobny do trójkąta OES, zatem

$$\frac{|SE|}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}}{3} \quad\text{oraz}\quad \frac{|SO|}{4}=\frac{\sqrt{7}}{3}.$$

Stąd $|SE|=\frac{7}{3}$ oraz $|SO|=\frac{4\sqrt{7}}{3}$.

$$|SF|=3+\frac{7}{3}=\frac{16}{3}.$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa:

$$P_b=4\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot\frac{16}{3}=\frac{256}{3}$$

Obliczamy objętość tego ostrosłupa:

$$V=\frac{1}{3}\cdot 8^2\cdot\frac{4\sqrt{7}}{3}=\frac{256\sqrt{7}}{9}$$