Sprawdź, czy zdasz!

Próbna matura 2011 matematyka

Poziom rozszerzony

Maturzysto! Już za tydzień egzaminy. A już dziś drukujemy próbną maturę z matematyki na poziomie rozszerzonym przygotowaną przez naszych ekspertów. Jutro – angielski i niemiecki

CZAS PRACY: **120 MINUT**
LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: **50**

Zadanie 1. (4 pkt)
Rozwiąż nierówność $|x+2|+|3x-9|>23$.

Zadanie 2. (6 pkt)
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których równanie $x^2-mx+1=0$ ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste x_1, x_2 takie, że $x_1^3+x_2^3>m^2+m-4$.

Zadanie 3. (4 pkt)
Wyznacz wszystkie wartości parametru m, dla których wykres wielomianu $W(x)=x^5-2x^4-2mx^3+4mx^2+m^2x-2m^2$ ma dokładnie dwa punkty wspólne z osią Ox.

Zadanie 4. (4 pkt)
Wykaż, że dla każdych dodatnich liczb rzeczywistych a, b, c, d prawdziwa jest nierówność $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$.

Zadanie 5. (5 pkt)
Rozwiąż równanie $\cos 2x+\sqrt{3}\cdot\sin 2x=\cos^2 x-7\sin^2 x$.

Zadanie 6. (4 pkt)
Trzy liczby, których suma jest równa 26, są jednocześnie trzema kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego oraz drugim, trzecim i szóstym wyrazem rosnącego ciągu arytmetycznego. Wyznacz te liczby.

Zadanie 7. (5 pkt)
Oblicz, ile jest wszystkich liczb naturalnych sześciocyfrowych, w zapisie których występuje dokładnie raz cyfra 1, oraz dokładnie dwa razy cyfra 2.

Zadanie 8. (4 pkt)
W trójkącie prostokątnym ABC odcinek CD jest wysokością opuszczoną na przeciwprostokątną AB. Obwód trójkąta ADC jest równy 40, a obwód trójkąta BDC jest równy 24. Oblicz obwód trójkąta ABC.

Zadanie 9. (4 pkt)
Długości przekątnych rombu o kącie ostrym 45° są równe e oraz f $(e<f)$.
Wykaż, że $\frac{e}{f}=\sqrt{2}-1$.

Zadanie 10. (4 pkt)
Punkty $A=(9,12)$ oraz $B=(5,10)$ leżą na okręgu, którego środek leży na prostej o równaniu $x+y+3=0$. Wyznacz równanie tego okręgu.

Zadanie 11. (6pkt)
Dany jest zbiór trójkątów równoramiennych o obwodzie 24. Oblicz długości boków trójkąta należącego do tego zbioru, który przy obrocie dookoła prostej zawierającej jego podstawę o kąt 360° wyznacza bryłę o największej objętości.

Partner radiowy RMF

Studia w kraju, za granicą, a może rok przerwy? Co planują tegoroczni maturzyści po egzaminie, słuchaj w Faktach **RMF FM**.
Jakie stroje na egzamin dojrzałości są modne w tym roku, co powinny ubrać maturzystki, a co maturzyści? Słuchaj w Faktach **RMF MAXXX**

ROZWIĄZANIA

Zadanie 1. (4 pkt)
Wyróżniamy na osi liczbowej parami rozłączne przedziały, których sumą jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych: $(-\infty;-2)$, $\langle -2;3)$, $\langle 3;\infty)$.

Zapisujemy nierówność w każdym z przedziałów i rozwiązujemy układy nierówności

1. $\begin{cases} x<-2 \\ -x-2-3x+9>23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \\ -4x>16 \end{cases} \Leftrightarrow x<-4$

albo

2. $\begin{cases} -2\leq x<3 \\ x+2-3x+9>23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\leq x<3 \\ -2x>12 \end{cases}$; brak rozwiązań

albo

3. $\begin{cases} x\geq 3 \\ x+2+3x-9>23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3 \\ 4x>30 \end{cases} \Leftrightarrow x>7,5$

Zapisujemy odpowiedź

Odpowiedź: $x\in(-\infty;-4)\cup(7,5;+\infty)$.

Zadanie 2. (6 pkt)
Zapisujemy warunki zadania

$\begin{cases} 1.\ \Delta>0 \\ 2.\ x_1^3+x_2^3>m^2+m-4 \end{cases}$

i kolejno je rozwiązujemy:

1. $\Delta=m^2-4$, $\Delta>0 \Leftrightarrow m\in(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$

2. $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)(x_1^2-x_1x_2+x_2^2)=(x_1+x_2)(x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-3x_1x_2)=$
$=(x_1+x_2)\left((x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right)$

Korzystając ze wzorów Viete'a otrzymujemy

$x_1^3+x_2^3=m(m^2-3)=m^3-3m$

i nierówność jest postaci

$m^3-3m>m^2+m-4 \Leftrightarrow m^3-m^2-4m+4>0$

$m^2(m-1)-4(m-1)>0 \Leftrightarrow (m-1)(m^2-4)>0$

$\Leftrightarrow (m-1)(m-2)(m+2)>0$

Rozwiązaniem tej nierówności jest $m\in(-2;1)\cup(2;\infty)$.

Rozwiązaniem zadania jest część wspólna rozwiązań warunku 1. oraz 2. czyli $m\in(2;+\infty)$.

Odpowiedź: $m\in(2;+\infty)$.

Zadanie 3. (4 pkt)
Zapisujemy wielomian w postaci iloczynowej

$W(x)=x^5-2x^4-2mx^3+4mx^2+m^2x-2m^2=$
$=x^4(x-2)-2mx^2(x-2)+m^2(x-2)=$
$=(x-2)(x^4-2mx^2+m^2)=(x-2)(x^2-m)^2$

Jednym z punktów wspólnych wielomianu W z osią Ox jest $(2,0)$.
Jeżeli $m<0$, to innych punktów wspólnych nie ma.
Jeśli $m=0$, to punkt $(0,0)$ też jest punktem wspólnym.
Jeśli $m>0$, to punktami wspólnymi są też $(-\sqrt{m},0)$ i $(\sqrt{m},0)$. Jednym z nich ma być $(2,0)$.

R E K L A M A

30680131

Stąd wynika, że aby były dwa punkty wspólne, to $\sqrt{m}=2$, czyli $m=4$.

Odpowiedź: $m_1=0,\ m_2=4$.

Zadanie 4. (4 pkt)

Obie strony nierówności są dodatnie, po podniesieniu obu stron do kwadratu otrzymujemy nierówności równoważne:

$(a+c)(b+d)\geq ab+cd+2\sqrt{abcd}$.

Po redukcji wyrazów podobnych otrzymujemy

$ad+bc\geq 2\sqrt{abcd}$.

Podnosząc jeszcze raz obie strony do kwadratu, otrzymujemy

$(ad)^2+(bc)^2+2abcd\geq 4abcd$,

czyli

$(ad-bc)^2\geq 0$.

Ostatnia nierówność jest prawdziwa dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d.

Zadanie 5. (5 pkt)

Korzystając ze wzorów na $\cos 2\alpha$ oraz $\sin 2\alpha$, zapisujemy równanie w postaci

$\cos^2 x-\sin^2 x+\sqrt{3}\cdot 2\sin x\cos x=\cos^2 x-7\sin^2 x$,

czyli

$6\sin^2 x+2\sqrt{3}\cdot\sin x\cos x=0$

$\cos x=0$ nie jest rozwiązaniem tego równania, możemy więc obie strony tego równania podzielić przez $6\cos^2 x$.

Otrzymujemy

$\mathrm{tg}^2 x+\frac{\sqrt{3}}{3}\mathrm{tg}x=0$ czyli $\mathrm{tg}x\left(\mathrm{tg}x+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=0$

Stąd $\mathrm{tg}x=0$ albo $\mathrm{tg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Odpowiedź: $x=k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą

albo $x=\frac{5\pi}{6}+k\pi$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Zadanie 6. (4 pkt)

Oznaczmy przez a pierwszą z trzech liczb (najmniejszą) oraz przez r różnicę ciągu arytmetycznego; $r>0$. Liczby możemy zapisać w postaci: $a,\quad a+r,\quad a+4r$ (a oznacza drugi wyraz ciągu arytmetycznego).

Znając sumę tych liczb oraz własność ciągu geometrycznego, zapisujemy układ równań

$$\begin{cases} a+a+r+a+4r=26 \\ (a+r)^2=a(a+4r) \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 3a+5r=26 \\ r(r-2a)=0 \end{cases}$$

Z drugiego równania wynika, że $r=2a$ lub $r=0$, a to rozwiązanie jest sprzeczne z założeniem. Stąd $r=2a$, czyli $a=2,\ r=4$.

Odpowiedź: Liczby opisane w treści zadania, to 2, 6, 18.

Zadanie 7. (5 pkt)

Stwierdzamy, że są trzy parami rozłączne przypadki. Pierwszą cyfrą tej liczby może być:
1. cyfra 1,
2. cyfra 2,
3. cyfra należąca do zbioru $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Obliczamy, ile jest liczb w każdym przypadku.

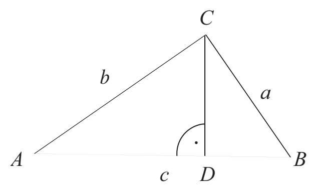
ad. 1. $1\cdot\binom{5}{2}\cdot 8^3=5120$

ad. 2. $1\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot 8^3=10240$

ad. 3. $7\cdot\binom{5}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot 8^2=13440$

Odpowiedź: Łącznie jest $5120+10240+13440=28800$ takich liczb.

Zadanie 8. (4 pkt)



Rysujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia: $|BC|=a,\ |AC|=b,\ |AB|=c$.

Oznaczmy przez p obwód trójkąta ABC.

Trójkąty ADC oraz ABC są podobne, stąd $\frac{b}{c}=\frac{40}{p}$.

Trójkąty BDC oraz ABC są podobne, stąd $\frac{a}{c}=\frac{24}{p}$.

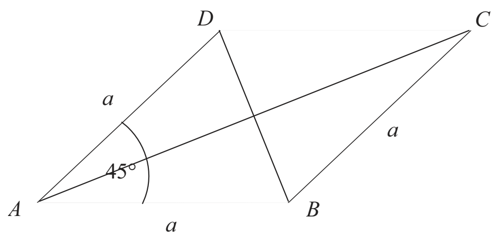
Zapisujemy twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta ABC i przekształcamy tę równość

$c^2=a^2+b^2 \iff 1=\left(\frac{a}{c}\right)^2+\left(\frac{b}{c}\right)^2=\left(\frac{24}{p}\right)^2+\left(\frac{40}{p}\right)^2=\frac{2176}{p^2}$,

stąd $p=\sqrt{2176}=8\sqrt{34}$. Odpowiedź: Obwód trójkąta ABC jest równy $8\sqrt{34}$.

Zadanie 9. (4 pkt)

Rysujemy rysunek pomocniczy i wprowadzamy oznaczenia: $|AB|=|BC|=|CD|=|DA|=a$, $|BD|=e,\ |AC|=f$.



Stosując twierdzenie kosinusów do trójkątów BAD oraz ABC, otrzymujemy

$e^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cdot\cos 45°=2a^2-a^2\sqrt{2}=a^2\left(2-\sqrt{2}\right)$

$f^2=a^2+a^2-2a\cdot a\cdot\cos 135°=2a^2+a^2\sqrt{2}=a^2\left(2+\sqrt{2}\right)$

$\frac{e^2}{f^2}=\frac{a^2\left(2-\sqrt{2}\right)}{a^2\left(2+\sqrt{2}\right)}=\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}=3-2\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.

Stąd $\frac{e}{f}=\sqrt{2}-1$, co należało wykazać.

Zadanie 10. (4 pkt)

Środek S okręgu to punkt wspólny podanej prostej oraz symetralnej odcinka AB. Symetralna odcinka AB ma równanie $2x+y-25=0$. (Punkt $P=(x,y)$ leży na symetralnej odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy $|AP|=|BP|$).

Zapisujemy i rozwiązujemy układ równań

$$\begin{cases} x+y+3=0 \\ 2x+y-25=0 \end{cases}$$

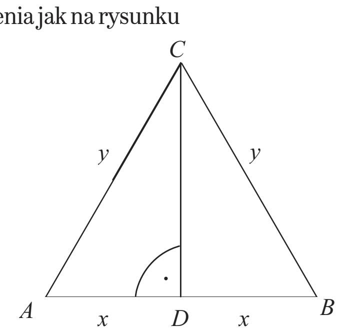
Otrzymujemy $S=(28,-31)$.

Obliczamy kwadrat promienia r okręgu: $r^2=|AS|^2=2210$.

Odpowiedź: Równanie okręgu jest postaci: $(x-28)^2+(y+31)^2=2210$.

Zadanie 11. (6 pkt)

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku



$2x+2y=24$, czyli $x+y=12$.

Bryła powstała z obrotu trójkąta dookoła prostej AB to suma dwóch przystających stożków o promieniu $r=|DC|$ i wysokości $h=x$.

$V=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\pi r^2\cdot x$

$r^2=y^2-x^2=(y+x)(y-x)=12\cdot(12-2x)$

Zapisujemy wzór funkcji $V(x)$: objętość bryły V w zależności od x, $x\in(0;6)$

$V(x)=2\cdot\frac{1}{3}\pi\cdot 12\cdot(12-2x)\cdot x=16\pi(6-x)\cdot x$

Funkcja V przyjmuje największą wartość dla $x=3$.

Odpowiedź: Wymiary trójkąta są następujące: podstawa ma długość 6, ramiona mają długość 9.

NOWA SERIA
SŁOWNIKÓW TEMATYCZNYCH
NIEZBĘDNA DLA UCZNIA

Od jutra w kioskach WIEDZA O KULTURZE
co czwartek kolejny tom

ZAMÓWIENIA PRZYJMUJEMY NA kulturalnysklep.pl
LUB POD NUMEREM TELEFONU 801 130 000
KOSZT POŁĄCZENIA WYNOSI 0,29 ZŁ W SIECI TP SA

Sprawdzasz i wiesz
- ponad 1000 zwięzłych haseł, pojęć i terminów
- kulturoznawstwo
- tradycje i nurty teatralne
- gatunki sztuki filmowej

POLECAJĄ
WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
gazeta WYBORCZA.PL

OGŁOSZENIE WŁASNE WYDAWCY
30701557